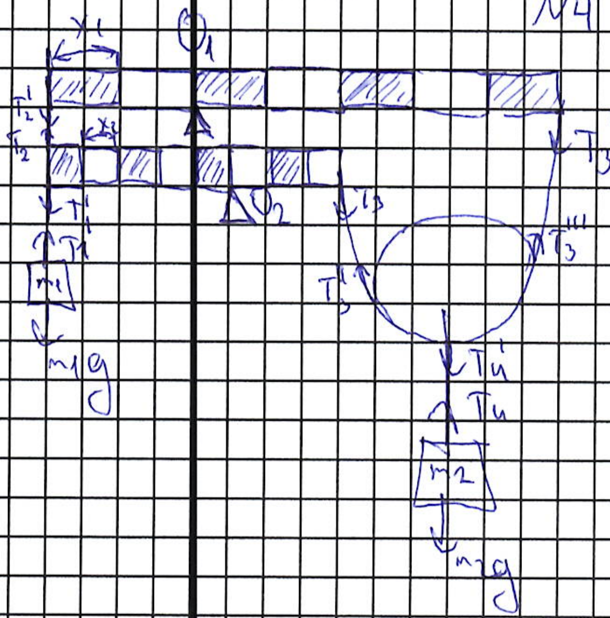
Место для скобы

Шифр Р-9-19

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
20+20+20+ +20+20=100	14.03.24	Соломатин К. В.	

№4



$T_1, T_1', T_2, T_2', T_3, T_3', T_4, T_4', T_3'', T_3'''$ – силы натяжения нитей (показаны на рис.)

$T_1 = T_1'$, $T_2 = T_2'$, $T_3 = T_3' = T_3'' = T_3'''$, $T_4 = T_4'$

Условие равновесия для груза m_1: $T_1 = m_1g$.

Условие равновесия для груза m_2: $T_4 = m_2g$

Условие равновесия для блока:

$T_4' = T_3'' + T_3'''$; $T_4 = 2T_3 \Rightarrow T_3 = \frac{T_4}{2} = \frac{m_2g}{2}$

Правило моментов для верхнего рычага (отн. т. O_1):

$T_2' \cdot 2x_1 = T_3' \cdot 5x_1$; $2T_2 = 5T_3 \Rightarrow T_2 = \frac{5}{2}T_3 = \frac{5}{2} \cdot \frac{m_2g}{2} = \frac{5m_2g}{4}$.

Правило моментов для нижнего рычага (отн. т. O_2):

$T_1' \cdot 5x_2 = T_2 \cdot 5x_2 + T_3 \cdot 3x_2$

место для скобы

Шифр Р-9-19

$5T_1 = 5T_2 + 3T_3$

$5m_1 g = 5\cdot\frac{5m_2 g}{4} + 3\cdot\frac{m_2 g}{2}$ $|:g$

$5m_1 = \frac{25m_2}{4} + \frac{3m_2}{2}$

$5m_1 = \frac{31}{4}m_2$

$m_1 = \frac{31}{20}m_2 = 1{,}55m_2.$

Ответ: $1{,}55m_2$. 20

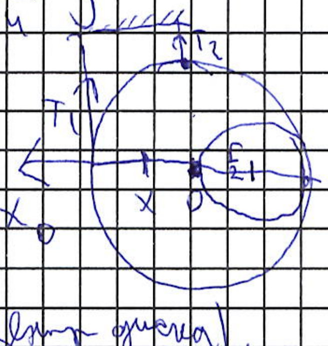
№1.

Пусть ρ – поверхностная плотность диска, m – масса всего диска, m_0 – масса диска с отверстием, m_1 – масса вырезанного отверстия (части диска, которую вырезали).

$m = m_0 + m_1 \Rightarrow m_0 = m - m_1$.

То: $m = \pi r^2\cdot\rho$; $m_1 = \pi\left(\frac{r}{2}\right)^2\cdot\rho = \frac{\pi r^2}{4}\cdot\rho$

$m_0 = m - m_1 = \frac{3\pi r^2}{4}\cdot\rho$



T_1, T_2 – силы натяжения нитей

Введём ось x_0 (0 – центр диска).

$$x = \frac{0\cdot m + \left(-\frac{r}{2}\right)\cdot\left(-\frac{\pi r^2}{4}\cdot\rho\right)}{m_0} = \frac{\frac{\pi r^3}{8}\cdot\rho}{\frac{3\pi r^2}{4}\cdot\rho} = \frac{r}{6}.$$

Запишем правило моментов отн. т. X:

$$T_2 \cdot \frac{r}{6} = T_1 \cdot \left(r - \frac{r}{6}\right)$$

$$\frac{T_2 \cdot r}{6} = T_1 \frac{5}{6} r \quad \Big| \cdot \frac{6}{r}$$

$$T_2 = 5T_1$$

Условие равновесия: $T_1 + T_2 = m_0 g = \frac{3}{4} \pi r^2 \rho \cdot g = \frac{3}{4} mg$

$$T_1 + T_2 = \frac{3}{4} mg \Rightarrow T_1 + 5T_1 = \frac{3}{4} mg \Rightarrow T_1 = \frac{mg}{8}$$

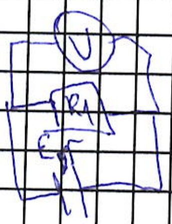
$$T_2 = 5T_1 = \frac{5mg}{8}$$

20

Ответ: $\frac{mg}{8}; \frac{5mg}{8}; \frac{r}{6}$.

№2

1-й случай:



Пусть I_1 – ток, текущий через резистор; I_2 – ток, текущий через вольтметр; I – ток, текущий через всю схему.

$$I = I_1 + I_2$$

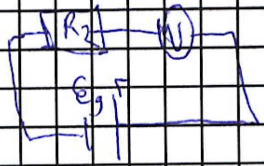
$$U_1 = R_1 I_1 = R_V I_2 \Rightarrow I_1 = \frac{U_1}{R_1},\ I_2 = \frac{U_1}{R_V}$$

$$\mathcal{E} = Ir + U_1 = r(I_1 + I_2) + U_1 = r \cdot \left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_V}\right) + U_1 \quad (1)$$

место для скобы

Шифр Ф-9-19

2-й случай:



Пусть I_3 – ток, текущий по схеме.

$R_V I_3 = U_2 \Rightarrow I_3 = \frac{U_2}{R_V}$.

$\mathcal{E} = rI_3 + R_V I_3 + R_2 I_3 = I_3(r + R_V + R_2) = \frac{U_2}{R_V}\cdot(r + R_V + R_2)$. (2)

Приравняем значения $\mathcal{E}$ из уравнений 1 и 2.

$$r\cdot\left(\frac{U_1}{R_1} + \frac{U_1}{R_V}\right) + U_1 = \frac{U_2}{R_V}\cdot(r + R_V + R_2) \;\Big|: U_1 = U_2$$

$$r\cdot\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V}\right) + 1 = \frac{1}{R_V}\cdot(r + R_V + R_2)$$

$$\frac{r(R_1 + R_V) + R_1R_V}{R_1R_V} = \frac{r + R_V + R_2}{R_V} \;\Big|\cdot R_VR_1$$

$$\cancel{rR_1} + rR_V + \cancel{R_1R_V} = \cancel{rR_1} + \cancel{R_VR_1} + R_2R_1$$

$$r = \frac{R_1R_2}{R_V} = 2\,\text{Ом}.$$

Ответ: $\frac{R_1R_2}{R_V}$; 2 Ом.

20

№3

Пусть тело бросили под углом α со скоростью v.

место для скобы

Шифр Ф-9-19

$L = v\cos\alpha\, t$ (1) $\Rightarrow v = \frac{L}{t\cos\alpha}$

$H = v\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow H + \frac{gt^2}{2} = v\sin\alpha\, t$ (2)

Поделив ур.-е 1 на ур.-е 2, получим:

$$\frac{L}{H+\frac{gt^2}{2}} = \frac{\cancel{v}\cos\alpha \cancel{t}}{\cancel{v}\sin\alpha \cancel{t}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H+\frac{gt^2}{2}}{L} \Big| \cdot 2 = \frac{2H+gt^2}{2L}$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \mid : \cos^2\alpha$

$$\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}, \text{ т.к. } 0<\alpha<90^\circ.$$

$$v = \frac{L}{t\cos\alpha} = \frac{L}{t\cdot\sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}}} = \frac{L}{t\cdot\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{2H+gt^2}{2L}\right)^2+1}}} = \frac{L}{t\cdot 2L\sqrt{\frac{1}{(2H+gt^2)^2+4L^2}}} =$$

$$= \frac{1}{2t\cdot\sqrt{\frac{1}{(2H+gt^2)^2+4L^2}}} = \frac{\sqrt{(2H+gt^2)^2+4L^2}}{2t} \approx 9{,}55\text{ м/с}$$

Рассмотрим случай, когда ~~...~~ начальная скорость гранаты $v_0 < v$.
Пусть граната летит под углом β к горизонту.
Расстояние, которое пролетит граната по горизонтали: $x_1 = v_0\cos\beta\, t$.
Расстояние, которое пролетит граната по вертикали: $x_2 = v_0\sin\beta\, t - \frac{gt^2}{2}$

место для скобы

Шифр Р-9-19

Расстояние между гранатой в момент взрыва и мишенью: $X =$

$$= \sqrt{(H-x_2)^2 + (L-x_1)^2} = \sqrt{(L - v_0\cos\beta t)^2 + \left(H - v_0\sin\beta t + \frac{gt^2}{2}\right)^2}$$

$$\frac{\partial X}{\partial \beta} = \frac{1}{2\sqrt{(H-x_2)^2+(L-x_1)^2}} \cdot \left(2(L - v_0\cos\beta t)\cdot v_0\sin\beta t + \right.$$

$$\left. + 2\left(H - v_0\sin\beta t + \frac{gt^2}{2}\right)\cdot -v_0\cos\beta t\right) = 0$$ (т.к. ищем минимальное значение X).

$$2v_0\sin\beta t(L - v_0\cos\beta t) = 2v_0\cos\beta t\cdot\left(H - v_0\sin\beta t + \frac{gt^2}{2}\right) \Big| : 2v_0 t$$

$$L\sin\beta - \cancel{v_0\sin\beta\cos\beta t} = H\cos\beta - \cancel{v_0\sin\beta\cos\beta t} + \frac{gt^2}{2}\cdot\cos\beta \Big| : \cos\beta$$

$$L\,tg\beta = H + \frac{gt^2}{2}$$

$$tg\beta = \frac{H + \frac{gt^2}{2}}{L} \Big| \cdot 2 = \frac{2H+gt^2}{2L}$$

Заметим, что $tg\beta > tg\alpha \Rightarrow$ при $v_0 \to v$, $X \to 0$ ~~др~~ $\Rightarrow$ при $tg\beta = \frac{2H+gt^2}{2L}$ X минимален.

20

$$\beta = arctg\left(\frac{2H+gt^2}{2L}\right) \approx 74{,}9^0$$

Ответ: 9,55 м/с; $74{,}9^0$.

место для скобы

Шифр Ф-9-19

№5

Пусть m_0 – масса воды, которую необходимо добавить, чтобы лёд нагрелся до $t_0 = 0^\circ C$.

$$c_л m \cdot (t_0 - t_1) = c_в \cdot m_0 \cdot (t_2 - t_0)$$

$$m_0 = \frac{c_л m (t_0 - t_1)}{c_в (t_2 - t_0)} = \frac{1}{40} кг = 25 г.$$

Объём всего сосуда – V. $V = hS = 500 см^3$.

Объём содержимого после доливания воды массой m_0: $\frac{m_0}{\rho_в} + \frac{m}{\rho_л} = \frac{575}{3} см^3 < V$ (т.е. вода не выливается)

Предположим, что весь лёд растаял (в процессе доливания воды).

$\lambda m = c_в \cdot m_1 \cdot (t_2 - t_0)$, где m_1 – масса долитой воды.

$$m_1 = \frac{\lambda m}{c_в \cdot (t_2 - t_0)} = \frac{11}{14} кг = \frac{5500}{7} г.$$

Объём содержимого: $\frac{m_0 + m + m_1}{\rho_в} = \frac{6725}{7} > V \Rightarrow$ в процессе доливания воды лёд растаял только частично.

Пусть ~~р~~ растаяла масса льда Δm (к моменту, когда вода заполнила весь сосуд).

$\lambda \Delta m = c_в \cdot m_2 (t_2 - t_0)$, где m_2 – масса долитой воды.

$$\Delta m = \frac{c_в m_2 (t_2 - t_0)}{\lambda}$$

место для скобы

Шифр Ф-9-19

Сейчас в сосуде $m-\Delta m$ льда, $m_0+m_2+\Delta m$ воды.

$$hS=V=\frac{m-\Delta m}{\rho_л}+\frac{m_0+m_2+\Delta m}{\rho_в}$$

$$hS=\frac{m-\frac{c_в m_2\cdot(t_2-t_0)}{\lambda}}{\rho_л}+\frac{m_0+m_2+\frac{c_в m_2(t_2-t_0)}{\lambda}}{\rho_в} \quad \Big| \cdot \rho_л\rho_в$$

$$hS\rho_л\rho_в=m\rho_в-\frac{c_в(t_2-t_0)\rho_в}{\lambda}\cdot m_2+m_0\rho_л+m_2\rho_л+\frac{c_в(t_2-t_0)\rho_л}{\lambda}\cdot m_2$$

$$m_2\left(\rho_л+\frac{c_в\rho_л(t_2-t_0)}{\lambda}-\frac{c_в\rho_в(t_2-t_0)}{\lambda}\right)=hS\rho_л\rho_в-m\rho_в-m_0\rho_л$$

$$m_2=\frac{\lambda(hS\rho_л\rho_в-m\rho_в-m_0\rho_л)}{\rho_л\lambda-c_в(t_2-t_0)(\rho_в-\rho_л)}=\frac{407}{1292}\,кг=\frac{101750}{323}\,г$$

Масса добавленной воды: $m_0+m_2=\frac{109825}{323}\,г\approx 340\,г.$

Ответ: 340 г. 20