

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
255	20.03.25	Геллерштейн	А
Шифр		918208	

✓ 1) $\frac{x+y}{x-y} = ?$ если $x > y$ и $x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$;

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \Rightarrow x^2 + y^2 - \frac{6}{3}xy = \frac{4}{3}xy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-y)^2 = \frac{4}{3}xy;$$

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy;$$

$$x^2 + y^2 + \frac{6}{3}xy - \frac{6}{3}xy = \frac{10}{3}xy;$$

$$x^2 + y^2 + 2xy = \frac{16}{3}xy \Rightarrow (x+y)^2 = \frac{16}{3}xy;$$

пусть $z = \frac{x+y}{x-y}$; т.к. $x > y$, то $x-y > 0$; $x+y > 0$;

$$\Rightarrow z > 0; \Rightarrow z^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2};$$

найдем z ; $z^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2};$

из выше описанного:

$$\begin{cases} (x+y)^2 = \frac{16}{3}xy \\ (x-y)^2 = \frac{4}{3}xy \\ z^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} \end{cases}$$

Решим систему:

$$z^2 = \frac{\frac{16}{3}xy}{\frac{4}{3}xy}; \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = 2 \text{ т.к. } z > 0;$$

Ответ: 2

✓ 3) $a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}; \Rightarrow a_n = \frac{n^4 - 1}{n^4} + 2(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3});$

$$a_n = \frac{n^4 - 1 + 2n(n^2 - 1)}{n^4} = \frac{(n^2 - 1)(n^2 + 1) + 2n(n^2 - 1)}{n^4};$$

$$a_n = \frac{(n^2 + 1 + 2n)(n^2 - 1)}{n^4};$$

$$a_n = \frac{(n+1)^2(n+1)(n-1)}{n^4} = \frac{(n+1)^3(n-1)}{n^4}$$

75

1/2/3/4/5
7/7/7/4/0

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

918208

3) $i=3$ элемента

$$a_n = a_{n+1} \cdot a_{n+2} = \frac{(n+1)^3 \cdot (n-1) \cdot (n+2)^3 \cdot n \cdot (n+3)^3 \cdot (n+1)}{n^4 \cdot (n+1)^4 \cdot (n+2)^4} = \frac{(n-1)(n+3)^3}{n^3(n+2)}$$
 то есть, каждая тройка a_n, a_{n+1} и a_{n+2} полностью сокращает a_{n+1} , при этом при добавлении a_{n+3} :

$$a_n \cdot a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3} = \frac{(n-1)(n+4)^3}{n^3(n+3)} \Rightarrow$$
 данная последовательность как из некого кол-ва элементов будут происходить по одной и той же системе;

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = \frac{(2-1)(99+1)^3}{2^3 \cdot (99)} = \frac{50^3}{99} = \frac{125000}{99}$$
 (т.к. для i и $i+1$ работает, то и для $i \neq 98$ будет раб.)
 Ответ: $\frac{125000}{99}$

70

12)

4) $x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$; приравняем к 0

$$x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$$

тогда x_1, x_2 по теореме Виета:

$$x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2}; \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}; \quad x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$(x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2})?$$

$$x_2 \neq 0 \quad x_1 = -\frac{1}{2px_2}$$

$$x_2 - \frac{1}{2px_2} = -p$$

$$\frac{2x_2^2 p - 1}{2px_2} = -p$$

$$\frac{2x_2^2 p - 1 + 2p^2 x_2^2}{1} = 0$$

$$2x_2^2 p + 2p^2 x_2^2 = 1$$

$$2px_2^2$$

$$2x_2 p (x_2 + p) = 1$$

$$p = -x_1 - x_2$$

$$2x_2 (-x_1 - x_2)(x_2 - x_1 - x_2) = 1$$

40

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$2x_1^4(x_1+x_2)(x_1)=1$$

предположим, что $x_1^4+x_2^4 \leq 2+\sqrt{2}$

$$2x_1x_2(x_1+x_2)=1$$

$$(x_1 \cdot (p^2 - \frac{1}{p^2}))^2 \leq 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{p^4}$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1x_2} = \frac{p}{2p^2} = \frac{1}{2p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{p}$$

$$4p^4 + \frac{1}{p^4} - 2 \leq 2 + \sqrt{2} - \frac{1}{2p^4}$$

$$\frac{x_1+x_2}{x_1+x_2} = 2p$$

$$p^4 + \frac{8}{2p^4} - 4 - \sqrt{2} < 0$$

$$\frac{2p^8+3}{2p^4} - 4 - \sqrt{2} < 0$$

$$x_1^4+x_2^4 \geq 2+\sqrt{2};$$

$$\frac{2p^8+3-8p^4-2\sqrt{2}p^4}{2p^4} < 0$$

т.е. д.

$$2p^8+3-8p^4-2\sqrt{2}p^4 < 0$$

$$\checkmark 2) a \geq 1; b \geq 2; c \geq 3; a^2+b^2+c^2 \geq 21$$

Доказать, что $a+b+c \geq 7$;

предположим, что это не так и $a+b+c < 7$;

пусть a_m, b_m, c_m — минимальные a, b, c ;

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq \frac{21}{3}$$

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 7$$

Тогда должны быть такие a, b, c так что:

$$a+b+c < 7; \frac{a^2+b^2+c^2}{3} \geq 7;$$

$$a^2 \geq 1$$

$$b^2 \geq 4$$

$$c^2 \geq 9$$

$$\begin{cases} 6 \leq a+b+c < 7; \\ 18 \leq 3a+3b+3c \leq 21 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2 \geq 21 \end{cases}$$

$$a^2+b^2+c^2 \geq 3(a+b+c)$$

тогда $c^2 \geq 21 - (a^2+b^2) \Rightarrow c$

$$\begin{cases} c < 7 - (a+b) \Rightarrow c < 4 \\ a < 7 - (b+c) \Rightarrow a < 2 \\ b < 7 - (a+c) \Rightarrow b < 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c^2 < 16 \\ a^2 < 4 \\ b^2 < 9 \end{cases}$$

75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$\sqrt{2}$ (пред): пусть эти расы

и пусть $c_{\max}$ — максимальное c при $a+b+c \leq 7$ и $a \geq 1$; $b \geq 2$;

пусть $b_{\max}$ — максимальное b при $a+b+c \leq 7$

пусть $a_{\max}$ — максимальное a при $a+b+c \leq 7$

$c_{\max}^2$ стремится к 16; $b_{\max}^2$ стремится к 9;

$a_{\max}^2$ стремится к 4

~~при этих условиях $a^2+b^2+c^2 \geq 21$~~

а наибольшая сумма $a^2+b^2+c^2$ возможна

при $a_{\min}^2 + b_{\min}^2 + c_{\max}^2$ т.к. из-за ограничения $6 \leq a+b+c \leq 7$, чем больше одно из слагаемых, тем меньше сумма 2 остальных $\Rightarrow$ наиболее выгодно увеличивать c т.к.

$c \geq 3$ и его макс квадрат можно увеличить

больше чем другие т.к. увеличить можно

на ≤ 1 . $\Rightarrow$ максимальная сумма квадратов

будет $a_{\min}^2 + b_{\min}^2 + c_{\max}^2$; $a_{\min}^2 = 1$; $b_{\min}^2 = 4$; $c_{\max}^2 \leq 16$,

то $a_{\min}^2 + b_{\min}^2 + c_{\max}^2 \leq 21$, это максимальная

сумма $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 \leq 21$

$\left\{ \begin{array}{l} a^2 + b^2 + c^2 \leq 21 \\ a^2 + b^2 + c^2 \geq 21 \end{array} \right.$ — противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ такого быть не может $\Rightarrow a+b+c \geq 7$

если $a \geq 1$; $b \geq 2$; $c \geq 3$ и $a^2+b^2+c^2 \geq 21$ т.е.