Место для скобы

Шифр 09327

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
11	23.0	Корнеева Е.Я.	[illegible]

№1 $3^{4046} - 3^{2023}\cdot 5^{1012} + 5^{2024}$; составными числами называются числа, которое можно получить произведением 2 других чисел, т.е. это НЕ простые числа.

пусть: ~~$3^{2023} = t \Rightarrow 3^{4046} = t^2$; $t, a > 0$~~

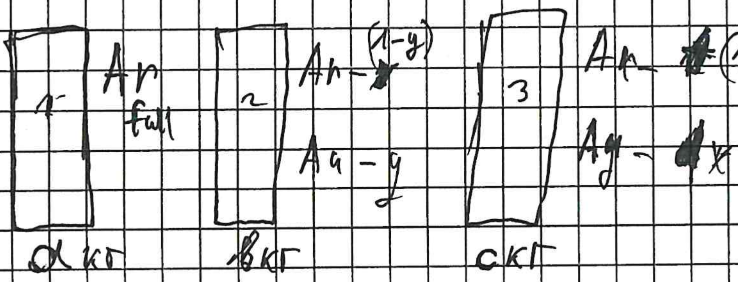
~~$5^{2024} = a^2 \Rightarrow 5^{1012} = a$;~~

$3^{2(2023)} - 3^{2023}\cdot 5^{1012} + 5^{2\cdot 1012} = A \quad / 3^{2023}$

$3^{a} - 5^{1012} + 5$

1	2	3	4	5	Σ
0	0	0	7	4	11

№3



x, y – доли золота в слитках

a – Ar в 1 $\quad$ by – Au в 2 $\quad$ Au в 3: cx

(1-y) b – Ar $\quad$ Ar в 3: c(1-x)

$$\begin{cases} b+c = 0{,}3(by + cx) + 0{,}7((1-y)b + c(1-x)) \quad Ar_{bc} \\ a+b = 0{,}2(by) + 0{,}8(a + b(1-y)) \quad Ar_{ab} \\ a+c = 0{,}2\,cx + 0{,}8(a + c(1-x)) \quad Ar_{ac} \end{cases} \Big| /2$$

~~$a+b+c = 0{,}3by + 0{,}3cx$~~

$$a+b+c = \frac{0{,}3by + 0{,}3cx + Ar_{bc} + 0{,}2by + Ar_{ab} + 0{,}2cx + Ar_{ac}}{2}$$

выход: 17:02 возврат: 17:06

Место для скобы

Шифр 09327

№2 $t^4 - 2\sqrt{13}\,t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

заметим, что $t^4 - 2\sqrt{13}\,t^2 + 13 = (t^2 - \sqrt{13})^2 \Rightarrow$

$(t^2 - \sqrt{13})^2 + t - \sqrt{13} = 0$ используем метод неопр. коэфф.

пусть $t = ax + b \Rightarrow$:

$(ax+b)^4 - 2\sqrt{13}(ax+b)^2 + ax + b + 13 - \sqrt{13} = 0$

$(a^2x^2 + 2axb + b^2)(a^2x^2 + 2axb + b^2) - 2\sqrt{13}(ax^2 + 2axb + b^2) + ax + b + 13 - \sqrt{13} = 0$

$a^4x^4 + 2a^3x^3b + a^2x^2b^2 + 2a^3x^3b + 4a^2x^2b^2 + 2axb^3 + a^2x^2b^2 + 2axb^3 + b^4 - 2a^2x^2\sqrt{13} + 4axb\sqrt{13} + 2b^2\sqrt{13} + ax + b + 13 - \sqrt{13} = 0$

$x^4(a^4) + x^3(2a^3b + 2a^3b) + x^2(a^2b^2 + 4a^2b^2 + a^2b^2 - 2a^2\sqrt{13}) + x(2ab^3 + 2ab^3 + 4ab\sqrt{13} + a) + b^4 + 2b^2\sqrt{13} + b + 13 - \sqrt{13} = 0$

сведём ур-ие к биквадратному; т.е. коэф при x^3 и x приравняем к нулю:

$4a^3b = 0$ $\quad a \neq 0$ (стоит перед x^4) $\Rightarrow$ $b = 0$

$4ab^3 + 4ab\sqrt{13} + a = 0$

№4 1) $0 < a < \frac{1}{2}$; $0 < b < \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$

2) $b^2 - a^2 > b - a$

$(b-a)(b+a) > b - a$

$(b-a)(a+b) + a - b > 0$

$-(a+b)(a-b) + (a-b) > 0$

$(a-b)(1-a-b) > 0 \Rightarrow$ т.к. $a + b < 1 \Rightarrow$

$1 - a - b > 0 \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a > b \Rightarrow$ ~~$b - a < 0$~~,

~~т.к. $0 < a, b < 1 \Rightarrow$ их квадраты при возведении их в степень > 1;~~
~~они будут уменьшаться $\Rightarrow a^3 < a^2 < a$~~

~~многогранно < в. Т.к. в<а => в−а<0 отриц. число =>~~

$a-b>0$

$b^3-a^3>b-a$ сравним $b^3-a^3 \vee b-a$:

$(b-a)(b^2+ab+a^2)+a-b \vee 0$

$-(a-b)(a^2+ab+b^2)+a-b \vee 0$

$(a-b)(-a^2-ab-b^2+1) \vee 0$ т.к. $a-b>0$ =>

сократим на него, т.к. знак от этого не поменяется:

$1-a^2-ab-b^2 \vee 0$ $1-(a^2+ab+b^2) \vee 0$

т.к. $0<a<\frac{1}{2}$, $0<b<\frac{1}{2}$ => $0<a^2<\frac{1}{4}$, $0<b^2<\frac{1}{4}$, $0<ab<\frac{1}{4}$ => $a^2+b^2+ab<\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$

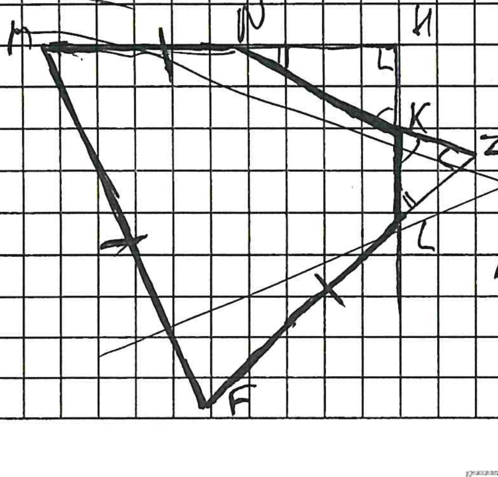
$a^2+b^2+ab<\frac{3}{4}$ => т.к. $\frac{3}{4}<1$ можно сказать, что

$a^2+b^2+ab<1$ =>

$1-(a^2+ab+b^2)>0$, т.к. $1-$ число<1 >0

ч.т.д.

№5



NMKLF − 5-угольник; ~~чтобы д-ть, что~~

$\angle HKN = \angle LKZ$ (к/л)

нужно д-ть, что $\angle NMF + \angle LFM < 180$ <=>

$NK+KL<1$

№2 $t^4 - 2\sqrt{13}t^2 + t + 13 - \sqrt{13} = 0$

заметим, что: $t^4 - 2\sqrt{13}t^2 + 13 = (t^2 - \sqrt{13})^2 \Rightarrow$

$(t^2 - \sqrt{13})^2 + t - \sqrt{13} = 0$

пусть $t - \sqrt{13} = x \Rightarrow t^2 = (x + \sqrt{13})^2$

$((x + \sqrt{13})^2 - \sqrt{13})^2 + x = 0$

$(x^2 + 2x\sqrt{13} + 13 - \sqrt{13})^2 + x = 0$

$x^4 + 2x^3\sqrt{13} + 13x^2 - x^2\sqrt{13} + 2x^3\sqrt{13} + 4x^2\cdot 13 + 2x\cdot 13\sqrt{13} - 2x\cdot 13 +$

$+ 13x^2 + 2\cdot 13x\sqrt{13} + 13^2 - 13\sqrt{13} - x^2\sqrt{13} - 2x\cdot 13 - 13\sqrt{13} + 13 + x = 0$

$x^4 + x^3(2\sqrt{13} + 2\sqrt{13}) + x^2(13 - \sqrt{13} + 4\cdot 13 + 13 - \sqrt{13}) + x(2\cdot 13\sqrt{13} - 2\cdot 13 +$

$+ 2\cdot 13\sqrt{13} - 2\cdot 13 + 1) + 13^2 - 13\sqrt{13} - 13\sqrt{13} + 13 = 0$

$x^4 + x^3(4\sqrt{13}) + x^2(78 - 2\sqrt{13}) + x(52\sqrt{13} - 53) + 13(14 - 2\sqrt{13}) = 0$

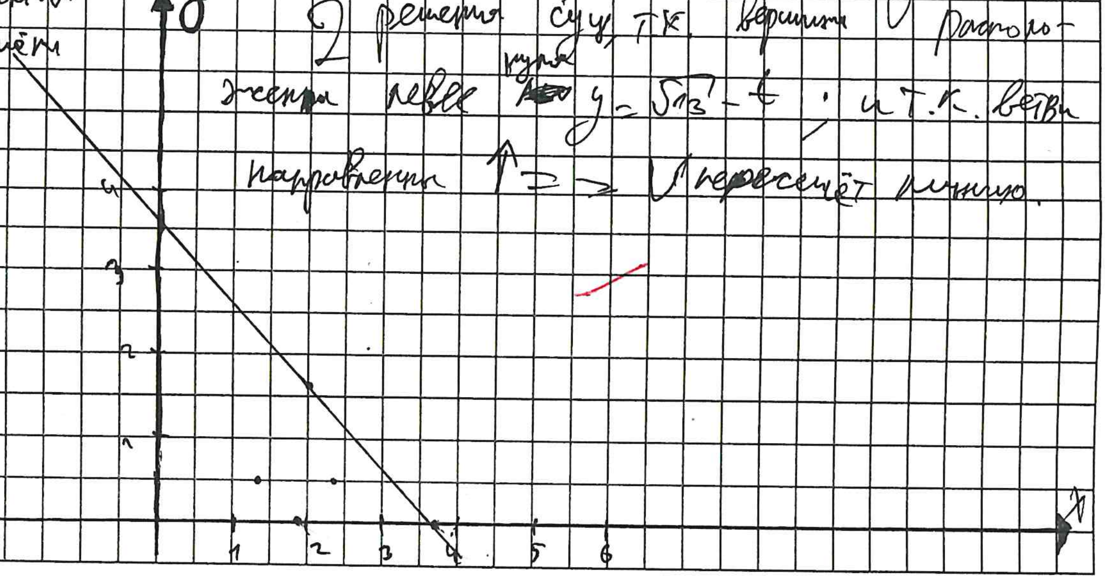
$(t^2 - \sqrt{13})^2 = \sqrt{13} - t$

$y = (t^2 - \sqrt{13})^2$ $\quad y = \sqrt{13} - t$ построив графики этих 2 функций в т-ах пересеч. будут корни.

для оценки того, существуют ли вообще корни, возьмём

$\sqrt{13} = 3,6$

$\sqrt[4]{13} = 1,9$

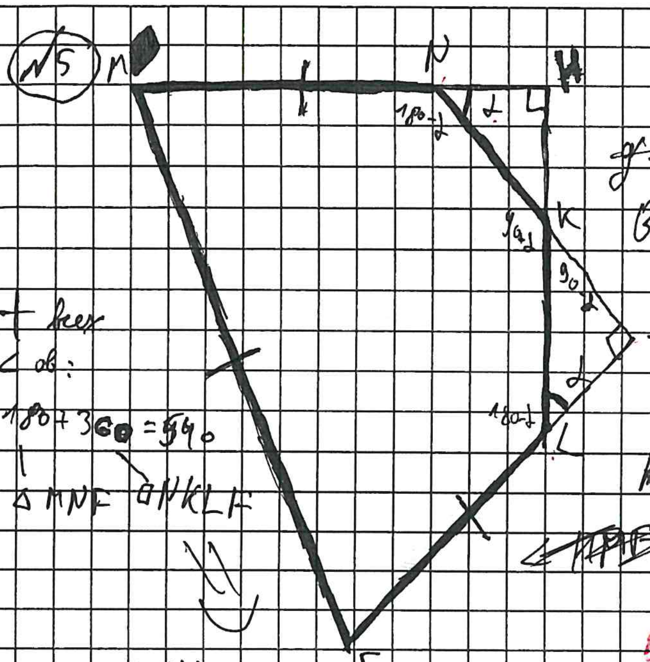


2 решения сущ, т.к. вершина ∪ расположена левее прямой $y = \sqrt{13} - t$; и т.к. ветви направлены ↑ ⇒ ∪ пересечёт прямую.

Место для скобы

Шифр

№5



~~Чтобы y-ть, что $NK+KL<1$, нужно y-ть, что $\angle NMF+\angle LFM<180^\circ$, т.к.~~

Вокруг $NLZH$ можно описать окр., т.к. $\angle NML = \angle NZL = 90$, опир на 1 дугу. $\Rightarrow$

$\angle MLZ = \angle ZNM$ (на 1 дуг)

NL — D окр-ти описанной вокруг $NLZH$;

~~$\angle NMF + \angle LFM < 180$~~

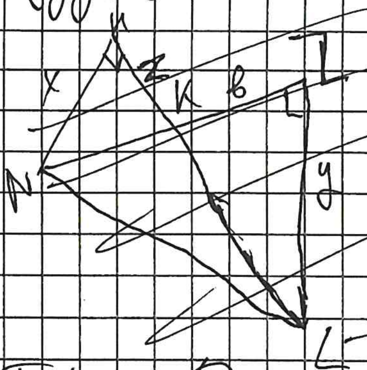
+ всех $\angle$ов:

$180+360=540$

$\triangle MNF \cup NKLF$

$\angle NMF + \angle LFM = 540 - 180 + \alpha - 90 - \alpha - 180 + \alpha = 90 + \alpha$, α — острый, т.к. явл. $\angle$ в прямоуг. $\triangle KZL$ $\Rightarrow$

$\angle NMF + \angle LFM < 180^\circ \Rightarrow NL < 1$; т.к. NL — Диаметр окр описанной вокруг 4угольника $NHZL$ $\Rightarrow$ все остальные хорды этой окр. будут меньше D $\Rightarrow$ $HL < NL < 1$, $NZ < NL < 1 \Rightarrow NK < 1$;



~~$NK = \sqrt{x^2+z^2}$; $KL = \sqrt{b^2+y^2}$; $KL<1$~~

~~$NL = \sqrt{x^2+(z+\sqrt{b^2+y^2})^2}$~~

~~$\angle NKL = 90+\alpha \Rightarrow$~~

Т.к. $D<1 \Rightarrow R_{\text{описанной}} < 0,5$, т.к. NK и KL лежат внутри окр $\Rightarrow$ они <1, но они и не пересек. окр. 2-ы, т.е. ?

$NK, KL < R < 0,5 \Rightarrow$

$NK + KL < 1$