Место для скобы

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
13 б	13.03.25	Лукина Н.Л.	

Шифр 025-2-11-3

№ 1

Выразим через $x^2+y^2=\frac{10}{3}xy$ сумму $x+y$:

$x^2+y^2+2xy=\frac{10}{3}xy+2xy$

$(x+y)^2=\frac{16}{3}xy$

$x>y>0 \Rightarrow \frac{16}{3}xy>0$ и $x+y>0$

$\sqrt{(x+y)^2}=\sqrt{\frac{16}{3}xy}$

$x+y=\sqrt{\frac{16}{3}xy}$

Выразим через $x+y^2=\frac{10}{3}xy$ разность $x-y$:

$x^2+y^2-2xy=\frac{10}{3}xy-2xy$

$(x-y)^2=\frac{4}{3}xy$

$\sqrt{(x-y)^2}=\sqrt{\frac{4}{3}xy}$

$|x-y|=\sqrt{\frac{4}{3}xy}$

$x>y \Rightarrow x-y>0$

$x-y=\sqrt{\frac{4}{3}xy}$

$\frac{x+y}{x-y}=\sqrt{\frac{16}{3}xy}:\sqrt{\frac{4}{3}xy}=\sqrt{\frac{16}{3}xy:\frac{4}{3}xy}=\sqrt{\frac{16}{3}\cdot\frac{3}{4}}=\sqrt{4}=2$

Ответ: 2

7б

№ 4.

$x^2+px-\frac{1}{2p^2}$

$D=p^2+\frac{4}{2p^2}=p^2+\frac{2}{p^2}$

$x_{12}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2+2:p^2}}{2}$

$p>0$

$p^2\geq 0$, $\frac{2}{p^2}>0 \Rightarrow p^2+\frac{2}{p^2}>0$

$x_1^4+x_2^4=\left(\frac{-p+\sqrt{p^2+2:p^2}}{2}\right)^4+\left(\frac{-p-\sqrt{p^2+2:p^2}}{2}\right)^4$

Сделаем замену: $-p+\sqrt{p^2+2:p^2}=a$, $-p-\sqrt{p^2+2:p^2}=b$

Чистовик 025-2-М-3

$$x_1^4+x_2^4=\frac{a^4}{16}+\frac{b^4}{16}=\frac{a^4+b^4}{16}=\frac{(a^2-b^2)^2+2a^2b^2}{16}=\frac{((a-b)(a+b))^2+2(ab)^2}{16}$$

Сделаем обратную замену:

$$x_1^4+x_2^4=\frac{((-p+\sqrt{p^2+2:p^2}+p+\sqrt{p^2+2:p^2})(-p+\sqrt{p^2+2:p^2}-p-\sqrt{p^2+2:p^2}))^2+2((-p+\sqrt{p^2+2:p^2})(-p-\sqrt{p^2+2:p^2}))^2}{16}=\frac{(-4p\sqrt{p^2+2:p^2})^2+8:p^4}{16}=\frac{16p^2\cdot(p^2+2:p^2)+8:p^4}{16}=p^4+2+\frac{1}{2p^4}$$

Найдём значения p, при которых выполняется неравенство

$x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$

$p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geq 2+\sqrt{2}$

$p^4+\frac{1}{2p^4}-\sqrt{2}\geq 0$

Сделаем замену $p^4=y$, где $y>0$:

$y+\frac{1}{2y}-\sqrt{2}\geq 0 \quad |\cdot 2y$

$2y^2-2\sqrt{2}y+1\geq 0$

$2(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\geq 0 \quad |:2$

$(y-\frac{\sqrt{2}}{2})^2\geq 0$

y может быть любым числом $\Rightarrow$ неравенство $x_1^4+x_2^4\geq 2+\sqrt{2}$ выполняется при любом ненулевом значении p, ч. т. д.

6б