

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
16		Коряклевая	М
Шифр			140007

1.1

$$x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy$$

$$x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$x^2 + y^2 = (x-y)^2 + 2xy$$

$$(x+y)^2 - 2xy = \frac{10}{3}xy$$

$$(x+y)^2 = \frac{10}{3}xy + 2xy = \frac{16}{3}xy$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy = \frac{16}{3}xy - 4xy = \frac{4}{3}xy$$

$$\left(\frac{x+y}{x-y}\right)^2 = \frac{(x+y)^2}{(x-y)^2} = \frac{\frac{16}{3}xy}{\frac{4}{3}xy} = \frac{16xy \cdot 3}{3 \cdot 4xy} = 4$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \sqrt{4} = 2$$

Ответ: 2

1	2	3	4	5	Σ
7	2	1	6	0	16

1.2

1) при $a=1, b=2, c=3, 1^2+2^2+3^2=14 < 21 \Rightarrow$ либо a , либо b , либо c должны быть больше своего $\min$ значения

2) Пусть $c=3+t, t \geq 0$

Тогда $1^2+2^2+(3+t)^2=14+6t+t^2 \geq 21$

$$t^2+6t-4=0$$

$$D = b^2 - 4ac = 36 + 16 = 52 = 4 \cdot 13$$

$$t_1 = \frac{-6+2\sqrt{13}}{2} = -3+\sqrt{13} > 0 \quad t_2 = \frac{-6-2\sqrt{13}}{2} = -3-\sqrt{13} < 0$$

$t=1$, тогда $c=4$ и $a+b+c=1+2+4=7$

3) увеличивая a или b , $a+b+c > 7$

4) $\min$ сумма $a+b+c=7$, при $a=1, b=2, c=4$, что удовлетворяет условию $a^2+b^2+c^2 \geq 21$

При увеличении a, b или $c, a \geq 1, b \geq 2, c \geq 4$ и $a^2+b^2+c^2 \geq 21$ сумма $a+b+c$ будет ≥ 7 , т.т.д.

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№4

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$, x_1 и x_2 удовлетворяют:

$$x_1 + x_2 = -p, x_1 x_2 = -\frac{1}{2p^2} \quad (\text{по теореме Виета})$$

$$x_1^4 + x_2^4 = (x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1^2 x_2^2$$

$$x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 = p^2 + \frac{1}{p^2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = \left(p^2 + \frac{1}{p^2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2p^2}\right)^2 = p^4 + 2 + \frac{1}{p^4} - \frac{1}{2p^4}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4}$$

Докажем: $p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$

$$f(p) = p^4 + \frac{1}{2p^4}$$

$$f'(p) = 4p^3 - \frac{2}{p^5} = 0 \Rightarrow 4p^8 = \frac{2}{p^5} \Rightarrow 4p^8 = 2 \Rightarrow p^8 = \frac{1}{2} \Rightarrow p = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}$$

T. link

$$f\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{8}}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$$

$$p^4 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2}$$

$$x_1^4 + x_2^4 = p^4 + 2 + \frac{1}{2p^4} \geq \sqrt{2} + 2$$

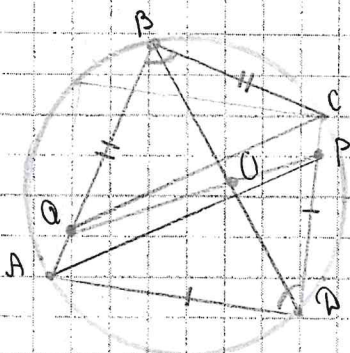
Вывод: Для x_1, x_2 многочлена

$x^2 + px - \frac{1}{2p^2}$ и любого $p \neq 0$ выполняется

неравенство $x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2}$, т.т.д.



№5



Дано: ABCD - четырехугольник, ABCD - вписан в окр.

$$DP = BQ; BC = QP.$$

BD делит PQ пополам - ?



Открытая региональная
межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

1) ABCD - вписанный четырёхугольник (по условию) $\Rightarrow \angle B + \angle D = 180^\circ$ и $\angle C + \angle A = 180^\circ$

2) $AP = AQ$ и $BQ = BC$ (по условию) $\Rightarrow \triangle AQP \sim \triangle CBA$

3) $BD \cap PQ = O$

4) $BO = PO$, т.к. P и Q располагаются на прямых, параллельных соответствующим сторонам, т.т.д.

из

$$a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4}$$

$$a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot \dots \cdot a_{99} = ?$$

$$a_n = \frac{n^4 + 2n^3 - 2n - 1}{n^4}$$

$$a_1 = 1 + \frac{2}{1} - \frac{2}{1^3} - \frac{1}{1^4} = \frac{1+2-2-1}{1} = 0$$

$$\cancel{a_1} = \frac{\cancel{1+2-2-1}}{\cancel{1}} \quad \cancel{a_2} = \frac{16+16-4-1}{16} = \frac{27}{16}$$

$$a_3 = \frac{81+54-6-1}{81} = \frac{128}{81}$$

$$a_4 = \frac{256+128-8-1}{256} = \frac{375}{256}$$