Место для скобы

Шифр 09220

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16б	23.03.24	Гетушина	[illegible]

1	2	3	4	5
0	7	7	2	0

7

№2

$x^2+kx+k=0$

$D = k^2-4k = k(k-4)$

$D\geq 0$, либо корней нет вообще $\Rightarrow k(k-4)\geq 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 4 \quad +$

$\Rightarrow k \in (-\infty; 0] \cup [4;+\infty)$

$x = \frac{-k \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{-k \pm \sqrt{k(k-4)}}{2} \in \mathbb{Z}$ ~~k~~

① $x = \frac{-k+\sqrt{k(k-4)}}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -k+\sqrt{k(k-4)} \,\vdots\, 2$

~~$k\in\mathbb{Z} \Rightarrow \sqrt{k(k-4)}$ - рационально~~

Пусть $-k+\sqrt{k(k-4)} = 2t$, где $t\in\mathbb{Z}$

$\sqrt{k(k-4)} = 2t+k \Rightarrow 2t+k\geq 0$

$k(k-4) = 4t^2+4tk+k^2$

$k^2-4k = 4t^2+4tk+k^2$

$4t^2+4tk+4k=0$

$t^2+tk+k=0$

~~$k\in\mathbb{Z}$ $t(k+1)=-t^2$~~

$k(t+1) = -t^2$

$k = -\frac{t^2}{t+1}$

Если $x\in\mathbb{Z}$, то $x^2\in\mathbb{Z}$, $kx\in\mathbb{Z} \Rightarrow x^2+kx\in\mathbb{Z}$ $\Big\} \Rightarrow k\in\mathbb{Z}$

$x^2+kx+k=0\in\mathbb{Z} \Rightarrow$

09220

$x = \frac{-k \pm \sqrt{k(k-4)}}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \in$ рациональным

$\Rightarrow \sqrt{k(k-4)} \in$ рациональным

$k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in$ рациональным

$\Rightarrow k(k-4)$ - квадрат

Пусть $k(k-4) = a^2$, где $a \in \mathbb{Z}$

$k^2 - 4k = a^2$

$k^2 - 4k + 4 = a^2 + 4$

$(k-2)^2 = a^2 + 4$

~~Т.к. разность между 2 к~~

$(k-2)^2 - a^2 = 4$

$(k-2-a)(k-2+a) = 4$

~~1) $\begin{cases} k-2-a = 1 \\ k-2+a = 4 \end{cases}$ (+)~~

~~$2k - 4 = 5 \Rightarrow k = 4{,}5 \notin$ не целое $\Rightarrow$ не подходит~~

~~2) $\begin{cases} k-2-a = -1 \\ k-2+a = -4 \end{cases}$ (+)~~

~~$2k - 4 = -5 \Rightarrow k = -0{,}5$ - не целое $\Rightarrow$ не подход~~

$k - a \underset{2}{\equiv} k + a \Rightarrow k-2-a \underset{2}{\equiv} k-2+a \Rightarrow$ скобки имеют одинаковую четность $\Rightarrow$ либо обе $= 2$, либо обе равны -2

1) $\begin{cases} k-2-a = 2 \\ k-2+a = 2 \end{cases}$ (+)

$2k - 4 = 4 \Rightarrow k = 4$ - подходит, $\in (-\infty; 0] \cup [4; +\infty)$

2) $\begin{cases} k-2-a = -2 \\ k-2+a = -2 \end{cases}$ (+)

$2k - 4 = -4 \Rightarrow k = 0$ - подходит, $\in (-\infty; 0]; [4; +\infty)$

Ответ: $k = 0$ или $k = 4$

место для скобы

Шифр 09220

№3

Пусть x_1 г золота – в I бруске, x_2 г – во 2 бруске золота, y_1 г – серебра в I бруске, ~~x_2~~ y_2 г – серебра во II бруске, y_3 г – серебра в III бруске

I + II : $x_1+x_2+y_1+y_2$ г – общая масса
x_1+x_2 – масса золота $\Big\} \Rightarrow \frac{x_1+x_2}{x_1+x_2+y_1+y_2} = 0{,}3 \Rightarrow$

$$x_1+x_2 = 0{,}3(x_1+x_2)+0{,}3(y_1+y_2)$$
$$0{,}7(x_1+x_2) = 0{,}3(y_1+y_2)$$
$$y_1+y_2 = \frac{7}{3}(x_1+x_2)$$

(I + III): $x_1+y_1+y_3$ г – общая масса
x_1 г – масса золота $\Big\} \Rightarrow \frac{x_1}{x_1+y_1+y_3} = 0{,}2 \Rightarrow x_1 = 0{,}2x_1+0{,}2y_1+0{,}2y_3$

$$\Rightarrow 0{,}8x_1 = 0{,}2y_1+0{,}2y_3 \Rightarrow 4x_1 = y_1+y_3 \ (1)$$

Аналогично для II + III : $4x_2 = y_2+y_3$ (2)

$$(1)+(2): 4x_1+4x_2 = y_1+y_2+2y_3 = \frac{7}{3}(x_1+x_2)+2y_3$$

70

$$2y_3 = \left(4-\frac{7}{3}\right)(x_1+x_2)$$
$$y_3 = \frac{12-7}{6}(x_1+x_2) = \frac{5}{6}(x_1+x_2)$$

I + II + III : $x_1+x_2+y_1+y_2+y_3 = x_1+x_2+\frac{5}{6}(x_1+x_2)+\frac{7}{3}(x_1+x_2) = \frac{6+5+14}{6}(x_1+x_2) = \frac{25}{6}(x_1+x_2)$

– масса общая
x_1+x_2 – масса золота $\Big\} \Rightarrow$ процент золота: $\frac{x_1+x_2}{\frac{25}{6}(x_1+x_2)} \cdot 100\% =$

$$= \frac{6}{25} \cdot 100\% = 24\%$$

Ответ: 24%

№4

$$\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}=\frac{(a+1)^2(c+1)+(b+1)^2(a+1)+(c+1)^2(b+1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}=\frac{a^2c+2ac+c+a^2+2a+1+ab^2+2ab+ba+b^2+2b+b+bc^2+2bc+b+c^2+c+1}{abc+ab+ac+bc+a+b+c+1}$$

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}=\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}$$ ~~[illegible]~~

Допустим, что $\frac{a+1}{b+1}+\frac{b+1}{c+1}+\frac{c+1}{a+1}>\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}$

$$\Rightarrow \frac{a^2c+2ac+a^2+2a+1+ab^2+2ab+a+b^2+2b+1+bc^2+2bc+b+c^2+c+1+c}{abc+ab+ac+bc+a+b+c+1}>\frac{a^2c+b^2a+c^2b}{abc}$$

$a^3bc^2+2a^2bc^2+a^3bc+2a^2bc+\boxed{abc}+2ab^3c+2a^2b^2c+a^2bc+\underbrace{ab^3c}+2ab^2c+\boxed{abc}+ab^2c^3+$
$+2ab^2c^2+ab^2c+abc^3+2abc^2+\boxed{abc}+abc^2>a^3bc^2+a^3bc+a^3c^2+a^2bc^2+\cancel{[illegible]}+a^3c+a^2bc+$
$+a^2c^2+a^2c+a^2b^3c+a^2b^3+a^2bc^2+\underbrace{ab^3c}+a^2b^2+ab^3+ab^2c+ab^2+ab^2c^3+ab^2c^2+abc^3+$
$+b^2c^3+abc^2+b^2c^2+bc^3+bc^2$

$a^2bc^2+a^2b^2c+2ab^2c+3abc+\cancel{2}+ab^2c^2+2abc^2>a^3c^2+a^3c+$
$+2a^2bc+\cancel{[illegible]}+a^2bc^2+$
$+a^2c^2+a^2c+a^2b^3+a^2b^2+ab^3+ab^2+b^2c^3+b^2c^2+bc^3+bc^2$

$abc(2a+2b+2c+ab+bc+ac+3)>abc\left(\frac{a^2c}{b}+\frac{a^2}{b}+\frac{ac}{b}+\frac{a}{b}+\frac{ab^2}{c}+\frac{ab}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b}{c}+\frac{bc^2}{a}+\right.$
$\left.+\frac{bc}{a}+\frac{c^2}{a}+\frac{c}{a}\right)\ \Big|:abc>0$

$2a+2b+2c+ab+bc+ac+3>\frac{a^2c}{b}+\frac{a^2}{b}+\frac{ac}{b}+\frac{a}{b}+\frac{ab^2}{c}+\frac{ab}{c}+\frac{b^2}{c}+\frac{b}{c}+\frac{bc^2}{a}+\frac{bc}{a}+\frac{c^2}{a}+$
$+\frac{c}{a}$

по неравенству о средних

$$\frac{a^2c}{b}+\frac{b}{c}\geqslant 2\sqrt{a^2}=2a$$

$$\frac{ab^2}{c} + \frac{c}{a} \geqslant 2\sqrt{b^2} = 2b$$

$$\cancel{a}\ \frac{bc^2}{a} + \frac{a}{b} \geqslant 2\sqrt{c^2} = 2c$$