

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
30	21.03	Коробков Е.Е.	

Задача 2

По условию при $0 < x < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$ $y^2 - x^2 > y - x$,

$$(y-x)(y+x) - (y-x) > 0$$

$$(y-x)(y+x-1) > 0$$

Поскольку $0 < x < \frac{1}{2}$ и $0 < y < \frac{1}{2}$, то $0 < x+y < 1 \Rightarrow$

$$x+y-1 < 0. \text{ Тогда и } y-x < 0^*$$

Докажем, что $y^3 - x^3 > y - x$. $y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$

$$(y-x)(y^2 + xy + x^2) - (y-x) > 0$$

$$(y-x)(x^2 + xy + y^2 - 1) > 0$$

$$(y-x)((x+y)^2 - xy - 1) > 0$$

$y-x < 0$ - доказано. Значит, докажем, что

$$(x+y)^2 - xy - 1 < 0.$$

$$0 < x+y < 1 \Rightarrow 0 < (x+y)^2 < 1.$$

$$0 < x < \frac{1}{2} \text{ и } 0 < y < \frac{1}{2} \Rightarrow 0 < xy < \frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$(x+y)^2 - xy < 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}, \quad (x+y)^2 - xy - 1 < \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{4},$$

$$(x+y)^2 - xy - 1 < 0.$$

Значит $y^3 - x^3 > y - x$, т.е. y .

✗

Задача 4

$$\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cdot \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \sin^{2025}(x)$$

Пусть $\cos 2x = a$, $\sin x = b$.

$$F(a) = a + a^{2023} + 2024 \cdot a^{2025} \quad a = \cos 2x \quad a \in [-1, 1]$$

$$F'(a) = 1 + 2023 a^{2022} + 2024 \cdot 2025 a^{2024}$$

Поскольку $a^{2022} \geq 0$ и $a^{2024} \geq 0$, то $F'(a) \geq 0$ на $D(F) \in [-1, 1]$,

F монотонно возрастающая на $D(F) \Rightarrow$ каждому значению a соответствует только одно значение $F(a)$

$\Rightarrow F(a) = F(b)$ возможно только при $a = b$

$$\cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = \sin x$$

$$2 \sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$(2 \sin x - 1)(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_3 = \pi - \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_4 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x_5 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

Задача 5.

$P \in MK, Q \in MK$ A - середина MK $SMK = 1$

$AP = AQ, PQ \parallel MK. PQ = ?$

1) Рассмотрим $\triangle AKQ$, где $AK = a, QK = g, \angle AKQ = 60^\circ$ (равност. $\triangle MKK$). По т.

$$\cos 60^\circ \text{ косинусов } AQ^2 = a^2 + g^2 - 2ag \cos 60^\circ =$$

$$= a^2 + g^2 - ag = AP^2$$

2) В $\triangle MPA$ $MP = p, MA = AK = a, \angle MAK = 60^\circ$

По т. косинусов $AP^2 = a^2 + p^2 - 2ap \cos 60^\circ = a^2 + p^2 - ap$

$$3) QA^2 = AP^2, a^2 + q^2 - aq = a^2 + p^2 - ap \Rightarrow q^2 - p^2 - aq + ap = 0,$$

$$(q-p)(q+p) - a(q-p) = 0, (q-p)(q+p-a) = 0$$

$$q = p - \text{противоречит условию} \quad q + p = a$$

$$\text{Пусть } q \neq p, \text{ то } q \neq p \neq \frac{a}{2} \quad q, p \in \mathbb{N} \Rightarrow q < a, p < a$$

$$4) \text{ Введем } Mx, \text{ где } M(0,0), Q(x_q; y_q)$$

$$P(x_p; y_p) \text{ Пусть } MP \text{ и } QK \geq 0, \text{ но } < a, \text{ то}$$

$$0 < y_p \leq \frac{a}{2} \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad 0 < y_q \leq a \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$0 < x_p \leq a \cos 60^\circ = \frac{a}{2} \quad 2a - a \cos 60^\circ = \frac{3a}{2} < x_q \leq 2a$$

$$5) \text{ Длина отрезка } PQ = \sqrt{(x_q - x_p)^2 + (y_q - y_p)^2}$$

$$|PQ| \text{ наименьший, когда } |x_q - x_p| \text{ и } |y_q - y_p| \text{ наименьшие}$$

$$y_p = \sqrt{3} x_p \quad y_q = 2a\sqrt{3} - \sqrt{3} x_q = \sqrt{3}(2a - x_q)$$

$$\text{Наименьший } |y_q - y_p| \rightarrow 0, \text{ т.е. } y_p = y_q, \sqrt{3} x_p = \sqrt{3}(2a - x_q),$$

$$x_p + x_q = 2a, \quad y_p = y_q = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad x_p = \frac{a}{2}, \quad x_q = \frac{3a}{2}$$

$$PQ \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{3a}{2} - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2} - \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \frac{3}{2}a \text{ Но т.к. } y_p \neq y_q \text{ (тогда}$$

$$MP \neq QK), \text{ то } PQ > \frac{3}{2}a$$

$$6) |PQ| \text{ наименьший, когда } |y_p - y_q| \text{ и } |x_p - x_q| \text{ наименьше -}$$

$$\text{шие, то } |y_q - y_p| = \frac{a\sqrt{3}}{2} - 0 = \frac{a\sqrt{3}}{2} \text{ Тогда либо}$$

$$y_p = 0, \quad x_p = 0 \text{ и } y_q = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad x_q = \frac{3a}{2} \quad \text{или}$$

$$y_q = 0, \quad x_q = 2a \text{ и } y_p = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad x_p = \frac{a}{2} \text{ В любой случае}$$

$$PQ = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3a}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{9}{4}a^2} = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}.$$

$$7) \text{ Пусть } PQ > \frac{3}{2}a \text{ и } PQ \leq a\sqrt{3}, \text{ то } PQ \in \left(\frac{3}{2}a, a\sqrt{3}\right]$$

$$\text{Сумма } \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 1, \quad a^2 = \frac{4}{\sqrt{3}}, \quad a = \frac{2}{\sqrt{3}} \quad PQ \in \left(\frac{3}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}, \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right],$$

$$PQ \in \left(\frac{4}{\sqrt{3}}, 2\sqrt{3}\right] \text{ Ответ: } \left[2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}\right].$$

Задача 1.

$$1000a + 100b + 10c + d$$

Число $abcd$,

$$a \leq b \leq c \leq d$$

— наименьшее.

$$1000a + 100b + 10c + d$$

$$a \leq b \leq c \leq d$$

$$(1000(a+1) + 100b + 10c + d)$$

Найдём такое a , что

$$a \leq b \leq c \leq d$$

$$1000a + 100b + 10c + d = m, \quad a \leq b \leq c \leq d = n$$

$$m > m + 1000$$

$$n > n + 1$$

$$mn < m > mn + 1000n, \quad m \geq 1000n$$

$$1000a + 100b + 10c + d > 1000a + 1000b + 1000c + 1000d,$$

$$900b + 990c + 999d < 0 \text{ — невозможно, т.к. } b, c \text{ и } d \text{ —}$$

— цифры, $b, c \text{ и } d \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$. $\Rightarrow$ такое a нет, наим. знач. $\frac{m}{n}$ достигается при

$$\text{наименьшем } a \Rightarrow a = 1. \quad ①$$

$$\text{Для } c \text{ и } d \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}: \frac{m}{n} > \frac{m+10}{n+1}, \quad mn < m > mn + 10n, \quad m \geq 10n.$$

$$1000a + 100b + 10c + d \geq 10a + 10b + 10c + 10d$$

$$990a + 90b > 9d, \quad 110a > d - 10b \text{ т.к. из } ① \ a \geq 1,$$

$$110 > d - 10b \text{ — всегда при } b \text{ и } d \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}.$$

 $\Rightarrow n$ — наименьшее при наим. c , $c = 9$ ②

$$\text{Для } d \text{ и } d \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}: \frac{m}{n} > \frac{m+1}{n+1}, \quad mn < m > mn + n, \quad m \geq n$$

$$1000a + 100b + 10c + d \geq 1a + b + c + d, \text{ из } ① \text{ и } ②$$

$$1090 + 100b \geq 10, \quad 100b > -1080 \text{ — всегда, т.к. } b \in \{0, 1, \dots, 8, 9\}$$

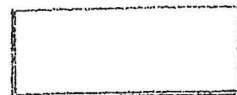
 $\Rightarrow n$ — наименьшее при наименьшем d , $d = 9$ ③

$$\text{Найдём } b, \text{ где } 1000 + 100b + 99 > 1000 + 100b + 199$$

$$(1099 + 100b) - 20b > (1199 + 100b) - 19b$$

$$2000b^2 + 21980b > 1900b^2 + 2278b$$

$$100b^2 - 801b > 0, \quad 100b(b - 8,01) \geq 0$$



$\overbrace{+0-0+}^m \rightarrow b$ и $b \in \{0, 1, \dots, 9\}$ то n увели-

вится, если увеличить n и b , где $b \geq 8$.

То.е. при $b=9$ n ~~не~~ увеличится, если b станет =

$\neq 9 \rightarrow 1 = 10$ - невозможно. Значит, подводящие эти-

рели b нет, n увеличится при увеличении $b \Rightarrow$

b - наименьшее, $b=0$ (4)

Из (1), (2), (3) и (4) $abcd = 1099$, где $n = \frac{1099}{19} =$

≈ 57.84 - наим. значение

Ответ: 1099.

Задача 3.

То.е. $P(17) = P(101)$, то $P(101) - P(17) = 0$.

$$a_n(101 - 17^n) + a_{n-1}(101 - 17^{n-1}) + \dots + a_1(101 - 17) + a_0 - a_0 = 0$$

Заметим, что для $(p-q)^k = (p-q)p^{k-1} + p^{k-2}q + \dots + p^2q^{k-3} +$

$(p \cdot q^{k-2} + q^{k-1})$, т.е. каждое слагаемое делится на

$101 - 17$, и при делении b полученное выражение

(для каждого) на 17 дает $+17$.

$$P(17) = 17 \cdot a_n + 17^{n-1} \cdot a_{n-1} + \dots + a_1 \cdot 17 + a_0 = 2024$$

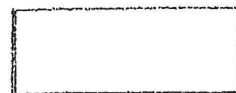
$$a_0 = 2024 - 17(a_1 + a_2 \cdot 17 + \dots + a_{n-1} \cdot 17^{n-2} + a_n \cdot 17^{n-1})$$

$$\text{Из } a_1 = -(a_2 \cdot (101 + 17) + \dots + a_{n-1} \cdot (101 + \dots + 17) + a_n(101 -$$

$-17))$ Подставив это выражение в равенство для a_0 ,

получим:

$$a_0 = 2024 + 17(a_2 \cdot (101 + 17) + a_3 \cdot 17 + \dots + a_{n-1} \cdot (101 + \dots + 17^{n-2}) -$$



$$-a_n \cdot 17^{n+2} + a_n (101^{n+1} + \dots + 17^{n+1}) - a_n \cdot 17^{n+1} =$$

$$= 2024 + 17 \cdot (101a_2 + \dots + a_{n+1} (101^{n-2} + \dots + 101 \cdot 17^{n-3}) +$$

$$+ a_n \cdot (101^{n-1} + \dots + 101 \cdot 17^{n-2})) = 2024 + 17 \cdot a', \text{ где } a'$$

кратно 101 и $a' \in \mathbb{Z}$ (м.к. получено из суммы произведений целых чисел)

Пусть $a' = 101k$, $k \in \mathbb{Z}$, $a_0 = 2024 + 17 \cdot 101k$.

$$|2024 + 17 \cdot 101k| < 999$$

$$-999 < 1717k + 2024 < 999$$

$$-3023 < 1717k < -1025$$

$$-\frac{3023}{1717} < k < -\frac{1025}{1717}$$

$$-1\frac{1208}{1717} < k < -\frac{1025}{1717}$$

Но $k \in \mathbb{Z}$, но $k = -1$

$$a_0 = 2024 + 1717 = 307$$

Ответ: 307.

X