

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
19		Коржеева	И
Шифр			041930

1 2 3 4 5 Σ
5 6 4 4 0 19 И

Задача 1.

$(z+a-b)^2 + (z+b-c)^2 + (z+c-a)^2$; Найти минимальное значение.

Значение выражения минимально, когда минимально его слагаемые $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ ① $(z+a-b)^2$ минимально при $z+a-b \leq 0 \Rightarrow$
 $\Rightarrow a-b \leq -z$

② $(z+b-c)^2$ мин. при $z+b-c \leq 0 \Rightarrow b-c \leq -z$

③ $(z+c-a)^2$ мин. при $z+c-a \leq 0 \Rightarrow c-a \leq -z$

Следовательно:

$$\begin{cases} a-b \leq -z \\ b-c \leq -z \\ c-a \leq -z \end{cases} \begin{cases} a \leq b-z \\ b \leq c-z \\ c \leq a-z \end{cases} \begin{cases} a \leq b-z \\ b \leq a-z-g \\ c \leq b-z-g \end{cases} \begin{cases} a \leq b-z \\ b \leq a-z \\ c \leq b-16 \end{cases} \begin{cases} a \leq b-z \\ b \leq c-z \\ c \leq c-2-16 \leq c-18 \end{cases}$$

при $c \leq c-18$ не имеет смысла

Представим выражение в виде функции Σ

$$f(a, b, c) = (z+a-b)^2 + (z+b-c)^2 + (z+c-a)^2$$

найдем частные производные и приравняем их к нулю:

$$① \frac{\partial}{\partial z}(z+a-b)^2 + \frac{\partial}{\partial z}(z+b-c)^2 + \frac{\partial}{\partial z}(z+c-a)^2 = 0$$

$$② \frac{\partial}{\partial a}(z+a-b)^2 + \frac{\partial}{\partial a}(z+b-c)^2 + \frac{\partial}{\partial a}(z+c-a)^2 = 0$$

$$③ \frac{\partial}{\partial b}(z+a-b)^2 + \frac{\partial}{\partial b}(z+b-c)^2 + \frac{\partial}{\partial b}(z+c-a)^2 = 0$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

$$\textcircled{1} \quad z/(z+a-b) + z/(y+c-a) \cdot (-1) = z+a-b-y-c+a = \\ = 2a-b-c-z=0$$

$$\textcircled{2} \quad z/(z+a-b) + z/(z+b-c) \cdot (-1) = -b-a+b+z+b-c = -a+2b-c-5=0$$

$$\textcircled{3} \quad z/(z+b-c) \cdot (-1) + z/(y+c-a) = -z-b+z+c+y+c-2a = -2a-2b+ \\ +4c+y=0$$

$$\begin{cases} 2a-b-c=z \\ -a+2b-c=5 \\ -2a-2b+4c=-14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=2a-b-z \\ -a+2b-(2a-b-z)=5 \Rightarrow -a+2b-2a=b=a+1 \\ -2a-2b+4c=-14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=2a-b-z \\ b=a+1 \\ -2a-2(a+1)+4(2a-b-z)=-14 \Rightarrow -2a-2a-2+8a-4b-4z=-14 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c=2a-b-z \\ b=a+1 \\ 4a-4b-4z=-14; a-b=-1; a-a+1=-1 \Rightarrow \end{cases}$$

$\Rightarrow$ сист. имеет бесконечное кол. решений.
Пусть $a=0$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \\ c=-3 \end{cases} \quad \text{изначальное выражение:} \\ \Rightarrow (z+1)^2 + (z+1+3)^2 \leq (3-3)^2 = 0$$

Ответ: 108

X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 3.

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2} \cdot x - 4}{18}\right) = 0$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = \cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2} \cdot x - 4}{18}\right) \Rightarrow$$

$\Rightarrow x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11$ определено в промежутке $[-1; 1]$

из известного выражение верно при:

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 = 1$$

$$x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 10 = 0 ; \text{ введем новую переменную: } t = \sqrt{x^2+1}$$

$$t^2 - 1 - 6t + 10 = 0$$

$$t^2 - 6t + 9 = 0$$

$$(t-3)^2 = 0$$

$$t = 3$$

проверим обратную задачу:

$$\sqrt{x^2+1} = 3$$

$$x^2 - 1 = 9$$

$$x^2 = 8 \Rightarrow x_1 = 2\sqrt{2}$$

$$x_2 = -2\sqrt{2}$$

$$\cos\left(\frac{x^2 + \sqrt{2} \cdot x - 4}{18}\right) = 1$$

$$\cos\left(\frac{x_1^2 + \sqrt{2} \cdot x_1 - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{8 + 4 - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{8}{18}\right) \neq 1 \Rightarrow$$

$x_1 = 2\sqrt{2}$ - не является решением

исключаем.

$$\cos\left(\frac{x_2^2 + \sqrt{2} \cdot x_2 - 4}{18}\right) = \cos\left(\frac{8 - 4 - 4}{18}\right) = \cos(0) = 1$$

$x_2 = -2\sqrt{2}$ - является решением

Ответ: $x = -2\sqrt{2}$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задача 2.

$$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$$

$$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$$

$Q(x)$:

$$x_1^4 + x_1^3 - 4x_1^2 + 1 = 0$$

$$x_1^4 + x_1^3 - 4x_1^2 = -1$$

Выразим $P(x)$ через x_1 :

$$P(x_1) = x_1^6 + x_1^5 - 4x_1^4 + x_1^2 - x_1 + 506, \text{ тогда используем}$$

$$x_1^4 + x_1^3 - 4x_1^2 = -1:$$

$$x_1^5 = x_1 \cdot x_1^4 = x_1(4x_1^2 - x_1^3 - 1) = 4x_1^3 - x_1^4 - x_1$$

$$x_1^6 = x_1 \cdot x_1^5 = x_1(4x_1^3 - x_1^4 - x_1) = 4x_1^4 - x_1^5 - x_1^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(x_1) = 4x_1^4 - x_1^5 - x_1^2 + (-x_1^4 + 4x_1^3 - x_1) - 4x_1^4 + x_1^2 - x_1 + 506 =$$

$$= -x_1^5 + 4x_1^3 - 2x_1 + 506$$

выразим $x_1^5 - x_1^4$ $x_1^5 = -x_1^4 + 4x_1^3 - x_1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow P(x_1) = x_1^4 - 4x_1^3 + x_1 - x_1^4 + 4x_1^3 - 2x_1 + 506 = x_1^4 - x_1 + 506$$

$$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = -x_1 + 506 - x_2 + 506 - x_3 + 506 - x_4 + 506 =$$

$$= -(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + 2024$$

используем.

т.к. x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x) \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$

$$P(x) = -(-1) + 2024 = 2025$$

Ответ: 2025

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Задание 4.

$$x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n, \quad x_1, x_2, \dots, x_n - \text{полож. числа.}$$

Доказать: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

Из неравенства следует:

$$\frac{x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1}}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}}$$

т.к. числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ - положительные $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{x_1 x_2 \dots x_n}{n} \geq (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{n-1}{n}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq n, \text{ сред.-но сред. геом. } x_1, x_2, \dots, x_n \geq n \quad \checkmark$$

Рассмотрим $x_i - n + 1$: $x_i > 0$, тогда $y_i = x_i - n + 1 \Rightarrow$

$$\Rightarrow y_i > -n + 1 \Rightarrow x_i > n, \text{ т.к. } (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n}} \geq n$$

$$\Rightarrow y_i \geq 1$$

применяя это неравенство, получим:

$$\text{т.к. } y_i \geq 1,$$

$$(y_1 y_2 \dots y_n)^{\frac{1}{n}} \geq 1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow y_1 y_2 \dots y_n \geq 1$; произведем обратную замену:

$$\Rightarrow (x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1, \text{ что и требовалось доказать}$$

~~Х~~