

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
23		Кореньева	И
Шифр			042018

Вариант 1

1. $\frac{x+y}{x-y} = ?$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \frac{10}{3}xy \\ x > y \end{cases}$ x и y - положительные числа

$$x^2 - \frac{10}{3}xy + y^2 = 0 \quad x^2 - 2xy + y^2 = (x-y)^2 \quad x^2 + 2xy + y^2 = (x+y)^2$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - \frac{4}{3}xy = 0 \quad x^2 + 2xy + y^2 - \frac{16}{3}xy = 0$$

$$(x-y)^2 = \frac{4}{3}xy \quad (x+y)^2 = \frac{16}{3}xy$$

$$x-y = \sqrt{\frac{4}{3}xy} = (x > y) \quad x+y = \sqrt{\frac{16}{3}xy} = 4\sqrt{\frac{1}{3}xy} \quad (x > y)$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{3}xy}$$

$$\frac{x+y}{x-y} = \frac{4\sqrt{\frac{1}{3}xy}}{2\sqrt{\frac{1}{3}xy}} = 2$$

Ответ: 2. X

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	9	0	23

И

2. $a+b \geq 7-c$

$+ a+c \geq 7-b$

$b+c \geq 7-a$

$2(a+b+c) \geq 21-a-b-c$

$21-a-b-c = 21-(a+b+c)$

$2(a+b+c) \geq 21-(a+b+c)$

$2(a+b+c) + (a+b+c) \geq 21$

$3(a+b+c) \geq 21 \quad / : 3$

$a+b+c \geq 7$

Это и требовалось доказать.

X

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

4. По неравенству Коши:

$a^2 + b^2 \geq 2ab$. Мы знаем, что:

$$x_1^4 + x_2^4 \geq 4x_1^2 x_2^2, \text{ значит } 4x_1^2 x_2^2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$(2x_1 x_2)^2 = 2 + \sqrt{2}$$

Пусть $x^2 + px - \frac{1}{2p^2} = 0$

Подставим:

$$\left(2 \cdot \left(-\frac{1}{2p^2}\right)\right)^2 = 2 + \sqrt{2}$$

$$x_1 + x_2 = -p$$

$$x_1 \cdot x_2 = -\frac{1}{2p^2}$$

$$\frac{1}{p^4} = 2 + \sqrt{2}$$

$$p^4 = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \Rightarrow p \neq 0 \text{ и условие } x_1^4 + x_2^4 \geq 2 + \sqrt{2} \text{ выполняется}$$

Что и требовалось доказать

$$3. a_n = 1 + \frac{2}{n} - \frac{2}{n^3} - \frac{1}{n^4} = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) + \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) = \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^4}\right) \left(1 + \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{1}{n} + 1\right)^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3$$

Разложим дробь и с конца читаем по этой формуле.

$$\left(1 - \frac{1}{99}\right) \left(1 + \frac{1}{99}\right)^3 = \frac{98}{99} \cdot \frac{100^3}{99^3}$$

$$\frac{98}{99} \cdot \frac{100^3}{99^3} \cdot \frac{97}{98} \cdot \frac{99^3}{98^3} \Rightarrow$$

$$\left(1 - \frac{1}{98}\right) \left(1 + \frac{1}{98}\right)^3 = \frac{97}{98} \cdot \frac{99^3}{98^3}$$

далее уйдут и остальные

числа, кроме $\frac{100^3}{99}$, поэтому рассмотрим a_1 , a_2 и a_3 , чтобы показать, что не сократятся там.

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right)^3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4^3}{3^3}$$

4 сокращения с a_5

3 сокращения, 2 сокращения,

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{3^3}{2^3}$$

3 тоже сокращения с a_5 ,

$$\text{остается } \frac{1}{2^3} \Rightarrow \frac{100^3}{2^3 \cdot 99} = \frac{1000000}{8 \cdot 99} = \frac{125000}{99} - \text{произведение всех чисел}$$

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

Ответ: $\frac{125000}{99}$ - приведение всех чисел. $\times$

5. Если смотреть так то, что $ABCD$ - квадрат, параллелограмм, прямоугольник. То, верно. Т.к. $\triangle BOQ = \triangle POD$ по двум сторонам и вертикальным углам.