ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

08169

Шифр

ет	МАТЕМАТИКА
нт	1
	11
ия	БАКЛАНОВ
	ЕГОР
во	МИХАЙЛОВИЧ
ождения	2 5 (Число) 1 0 (Месяц) 2 0 0 5 (Год)
	РОССИЯ
(пр: Томская обл., градская область)	Московская область
ципального образования деревня, село, город)	город
нный пункт (пр: Томск, зо, Псков)	Королёв
наименование ательного учреждения, ом Вы обучаетесь в время	ГАОУ МО „ЛНИП"

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

скооы

Шифр 08169 б

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
22	6.04	Корякина Е.Е.	

№1

а) По т. Виета для кубического трёхчлена:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3 = -\frac{-a}{a} = 1 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3 = \frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3 = -\frac{b}{a} \end{cases}$$

1	2	3	4	5	Σ
5	0	6	7	4	22

б) Преобразуем исходное рав-во:

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right) = A, \text{ где } A \in R$$

$$(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3}{x_1x_2x_3}\right) = A$$

в) Получим, что $A = 1 \cdot \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$ ч.т.д

+

№2

$$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022} \quad \Big| \text{ ОДЗ: } x^2-2023>0$$

$$(x^2-2023)^{\lg 2} = (x^2-2022)\cdot \lg 2$$

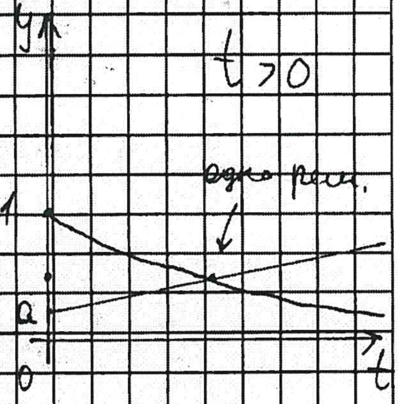
скобы

№2 (продолжение)

Пусть $x^2-2023=t$, $t>0$ из ОДЗ

$\lg 2=a$, $0<a<1$, т.к. $2<10$

Тогда $t^a=(t+1)\cdot a$ (*)



$y=t^a$ $\downarrow$ на $D(y)$ т.к. $0<a<1$

$y=(t+1)\cdot a$ $\uparrow$ на $D(y)$ т.к. $a>0$

Получили, что убыв. ф-я равна возрастающей, откуда (*) ~~всегда~~ имеет ед. решение

Вспомним, что $x^2-2023=t$

$x^2=t+2023>0$

Откуда исходное ур-во имеет 2 решения:

$x=\pm\sqrt{t+2023}$ Ответ: 2

№1

$2x^2+2x^2z^2+z^2+1+7y^2-42y+32=0$

$2x^2(z^2+1)+(z^2+1)+7y^2-42y+63-31=0$

$(2x^2+1)(z^2+1)+7(y-3)^2=31$

а) Рассм. знач. выраж. $7(y-3)^2$ для $y\geq 3$, при этом y - целое по условию

№1 (продолжение)

Пусть $7(y-3)^2 = A$, $A \leq 30$ т.к. $(2x^2+1)(z^2+1) \geq 1$

$\begin{cases} y=3 \\ A=0 \end{cases}$ $\begin{cases} y=4 \\ A=7 \end{cases}$ $\begin{cases} y=5 \\ A=28 \end{cases}$

б) Пусть $(2x^2+1)(z^2+1) = B$, $B \geq 1$

Тогда $\begin{cases} A=0 \\ B=31 \end{cases}$ $\begin{cases} A=7 \\ B=24 \end{cases}$ $\begin{cases} A=28 \\ B=2 \end{cases}$

в) Выраж. $(2x^2+1)$ может принимать след. значения: 1, 3, 9, 19, соотв. при $x = \{0, 1, 2, 3\}$

Откуда $B=31$ не подходит, т.к. 31 - простое

г) Выраж. (z^2+1) может принимать: 1, 2, 5, 10, 17, 26

Тогда $B=3$ можно разложить на $B = 3 \cdot 1$

а $B=24$ невозможно разложить на 2 множит. из пунктов (в) и ~~г~~ (г)

Получим ед. тройку:

$\begin{cases} 7(y-3)^2 = 28 \\ 2x^2+1 = 3 \\ z^2+1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y=5 \\ y=1 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-1 \end{array}\right. \\ z=0 \end{cases}$

Ответ: (x, y, z): $(1, 1, 0)$, $(1, 5, 0)$, $(-1, 1, 0)$, $(-1, 5, 0)$

скобы

Шифр 08169 б

№3

Пусть $\left.\begin{aligned} b+c&=x\\ a+c&=y\\ a+b&=z\end{aligned}\right\} \Rightarrow$ $a=\frac{y+z-x}{2}$

$b=\frac{x+z-y}{2}$

$x,y,z>0$ $c=\frac{x+y-z}{2}$

Тогда исходное нер-во перепишется след. образом:

$$\frac{2(y+z-x)}{2\cdot 3x}+\frac{2(x+z-y)}{2\cdot 3y}+\frac{2(x+y-z)}{2\cdot 3z}\geq 1$$

$$\frac{y+z-x}{x}+\frac{x+z-y}{y}+\frac{x+y-z}{z}\geq 3$$

пояснение.

$$\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\geq 6$$

Воспользуемся нер-м о средних для взаимнообратных чисел: $\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\geq 2\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}=2$

$x,y,z>0$

$\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\geq 2$

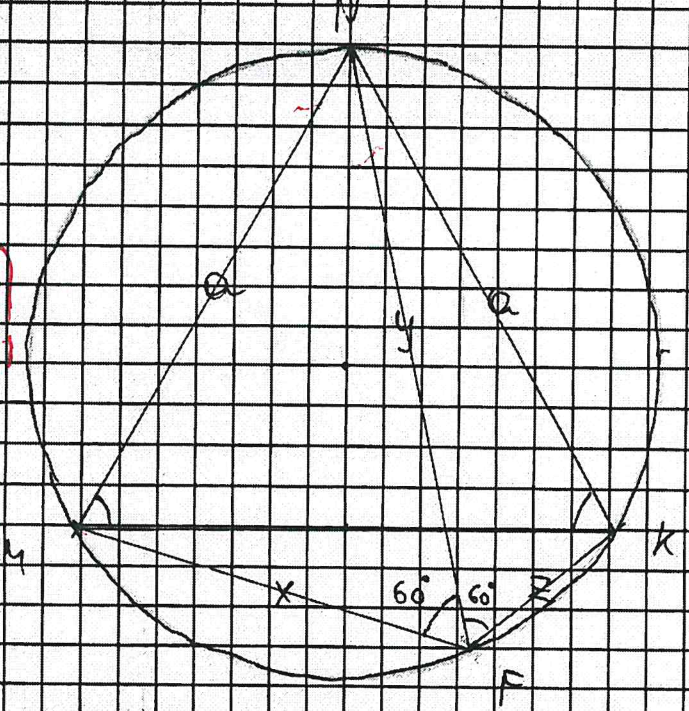
$\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\geq 2$

Получим что каждая пара чисел больше или равна двум, то есть ~~исходное~~ нер-во истинно при всех полож. x,y,z, а значит истинно и исходное нер-во. ч.т.д.

1

№5

Пусть $MF = x$, $FK = z$, $NF = y$,
$MN = MK = NK = a$



1) $\angle MFN = \angle KMN = 60°$ } опир. на
$\angle NFK = \angle NMK = 60°$ } одну дугу ?

2) По т. косинусов для $\triangle MFN$:

$a^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos 60°$

$a^2 = x^2 + y^2 - xy$ (1)

Аналог. для $\triangle NFK$: $a^2 = y^2 + z^2 - zy$ (2)

~~След~~ Из (1) и (2) имеем: $x^2 + y^2 - xy = y^2 + z^2 - zy$

$x^2 - z^2 - xy + yz = 0$

$(x-z)(x+z) - y(x-z) = 0$

$\left[\begin{array}{l} x = z \\ x + z = y \end{array}\right.$

3) Преобразуем $FM^4 + FN^4 + FK^4$:

$x^4 + y^4 + z^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2 - 2x^2y^2 - 2y^2z^2 - 2x^2z^2$

4) Рассм. случай, когда $x + z = y$:

Из (1): $a^2 = x^2 + y^2 - xy$

$a^2 = x^2 + xz + z^2$? незавершено

СКООЫ

Шифр

№5 (продолжение)

$$\begin{cases} x^2+xz+z^2=a^2 \\ x+z=y \\ x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2) \end{cases}$$

5) $x^4+y^4+z^4=(x^2+y^2+z^2)^2-2(x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2)=$
$=(x^2+x^2+2xz+z^2+z^2)^2-2(y^2(x^2+z^2)+x^2z^2)$

6) По т. кос. для $\triangle MKF$: $a^2=x^2+z^2+xz$

$a^2=(x+z)^2-xz=y^2-xz$

$\Downarrow$

$y^2=a^2+xz$

7) Получили:

$$\begin{cases} y^2=a^2+xz \\ x^2+xz+z^2=a^2 \\ x^4+y^4+z^4=4(x^2+xz+z^2)^2-2(y^2(x^2+z^2)+x^2z^2) \ (\vee) \end{cases}$$

$(\vee)$ $x^4+y^4+z^4=4a^4-2((a^2+xz)(a^2-xz)+x^2z^2)$

$x^4+y^4+z^4=4a^4-2(a^4-x^2z^2+x^2z^2)$

$x^4+y^4+z^4=2a^4$ $\Rightarrow$ искомая величина не зависит от выбора т. F, т.к. она всегда равна $2a^4$

8) при $x=z$ NF-диам, откуда $\triangle MNF$ и $\triangle NKF$ — -пр-к и данная сумма также равна $2a^4$

ч.т.д.