

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
205	10.03	25 Георгиев	<i>[Signature]</i>
Шифр			918403

2. $P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

$Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$

x_1, x_2, x_3, x_4 - корни $Q(x)$

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4) = \frac{P(x_1 + x_2 + x_3 + x_4)}{4}$

$P(x_i) = x_i^6 + x_i^5 - 4x_i^4 + x_i^2 - x_i + 506$

S - остаток $\rightarrow S = P_0$

$P_0 = 506 \cdot 4 = 2024$

коэф. при $x_i^3 = -1$

$\Rightarrow -(-1) + 2024 = 2025$

Ответ: 2025

1. a, b, c - действительные числа

$(x+a-b)^x + (x+b-c)^x + (x+c-a)^x = ?$

$(x+a-b)^x + (x+b-c)^x + (x+c-a)^x = K$

$y_1' = x(x+a-b) \cdot 1 + x(x+c-a) \cdot (-1)$
 $x(x+a-b) \cdot 1 + x(x+c-a) \cdot (-1) = 0$
 $x+a-b-x-c+a=0$
 $2a-b-c=x$

$y_2' = x(x+a-b) \cdot (-1) + x(x+b-c) \cdot 1 \rightarrow x(x+a-b) \cdot (-1) + x(x+b-c) \cdot 1 = 0$
 $-x-a+b+x+b-c=0$
 $2b-a-c=x$

$y_3' = x(x+b-c) \cdot (-1) + x(x+c-a) \cdot 1 \rightarrow x(x+b-c) \cdot (-1) + x(x+c-a) \cdot 1 = 0$
 $-x-b+c+x+c-a=0$
 $2c-a-b=x$

Из y_1' считаем y_2' : $2a-b-c-x-b-a-c=x-5$
 $3a-3b=-3 \quad /: 3$
 $a-b=-1$
 $\Rightarrow a=b=-1$

1/2/3/4/5
7/4/7/0/2

Итого: 40

40

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			918403

$$a) \begin{cases} 2(b-1) - b - c = 2 \\ b - c = 4 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} (b-1) - b + 2c = -7 \\ -2b + 2c = -8 \\ -b + c = 4 \end{cases}$$

$$b - c = 4 \text{ и } c = b - 4 \text{ подставлю в } a = b - 1$$

$$\Rightarrow K = (7 + (b-1) - b)^2 + (2 + b - (b-4))^2 + (9 + (b-4) - (b-1))^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow K = 6^2 + 6^2 + 6^2 = 36 + 36 + 36 = 108.$$

Ответ: 108.

$$3. x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} = 0$$

ОДЗ:

$$\cos \in [-1; 1]$$

$$\Rightarrow -1 \leq \cos \frac{x^2 + \sqrt{2}x - 4}{18} \leq 1$$

$$\text{и } \sqrt{x^2+1} \geq 0$$

$$\begin{cases} x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 - 1 \leq 0 \\ x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 11 + 1 \geq 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 10 \leq 0 \\ x^2 - 6\sqrt{x^2+1} + 12 \geq 0 \end{cases}$$

$$\text{Замена: } \sqrt{x^2+1} = a \quad \xrightarrow{(a+1)^2} \quad a = 3$$

$$\text{Обратная замена: } \begin{cases} \sqrt{8} = x_1, x_2 \\ x_1 = -2\sqrt{2} \\ x_2 = 2\sqrt{2} \end{cases}$$

Проверка:

$$(-2\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{(-2\sqrt{2})^2+1} + 11 - \cos \frac{(-2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(-2\sqrt{2}) - 4}{18} = 0$$

$$\cos 0 = 0 \Rightarrow 0 = 0.$$

$$(2\sqrt{2})^2 - 6\sqrt{(2\sqrt{2})^2+1} + 11 - \cos \frac{(2\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}(2\sqrt{2}) - 4}{18} = 0$$

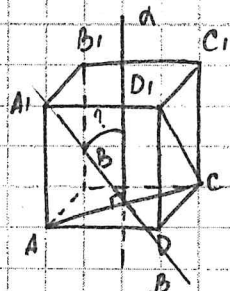
$$\cos\left(\frac{4}{9}\right) \neq 0 \Rightarrow 2\sqrt{2} - \text{посторонний корень.}$$

Ответ: $-2\sqrt{2}$.

75

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
Шифр			

5.



Дано:

Плоскость $\alpha \perp A_1C_1$

Плоскость $\beta \parallel CD_1$

Наименьший $\angle$ м/у
плоскостями α и β - ?

Решение:

Допустим, вершины куба
 $AB\bar{C}DA_1B_1C_1D_1$ имеют координаты:

$$\begin{aligned} A(0; 0; 0) \\ B(1; 0; 0) \\ C(1; 1; 0) \\ D(0; 1; 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_1(0; 0; 1) \\ B_1(1; 0; 1) \\ C_1(1; 1; 1) \\ D_1(0; 1; 1) \end{aligned}$$

Т.к. плоскость $\alpha \perp A_1C_1$:

$$\vec{A_1C_1} = C_1 - A_1 = (1; 1; 1) - (0; 0; 1) = (1; 1; 0)$$

$$\vec{n\alpha}: n_x + n_y = 0$$

$\vec{n\alpha}$ имеет координаты $(1; -1; 0)$

Т.к. плоскость $\beta \parallel CD_1$:

$$\vec{CD_1} = D_1 - C = (0; 1; 1) - (1; 1; 0) = (-1; 1; 0)$$

$$\vec{n\beta}: n_x = n_z$$

$\vec{n\beta}$ имеет координаты $(x; 0; x)$

Наименьший $\angle$ м/у плоскостями α
и $\beta = \cos \varphi$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{|\vec{n\alpha} \cdot \vec{n\beta}|}{|\vec{n\alpha}| \cdot |\vec{n\beta}|}$$

$$\vec{n\alpha} \cdot \vec{n\beta} = x$$

$$|\vec{n\alpha}| = \sqrt{2}; \quad |\vec{n\beta}| = |x| \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{2} \cdot |x| \sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$$

Ответ: 60° .

4. $x_1, x_2, \dots, x_n$ при $x_1^{n-1} + x_2^{n-1} + \dots + x_n^{n-1} = x_1 x_2 \dots x_n$

Д-во: $(x_1 - n + 1)(x_2 - n + 1) \dots (x_n - n + 1) \geq 1$

Д-во: $y_i = x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$