Место для скобы

ОРМО Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись
28	14.03	Хмылёва	

Шифр

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	-	7	28б

№1

$(7+a-b)^2+(2+b-c)^2+(9+c-a)^2$

$\frac{\partial f}{\partial a}=2(7+a-b)+2(9+c-a)(-1)=2(7+a-b-9-c+a)=2(2a-b-c-2)$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial b}=2(7+a-b)(-1)+2(2+b-c)=2(-7-a+b+2+b-c)=2(-a+2b-c-5)$ ✓

$\frac{\partial f}{\partial c}=2(2+b-c)(-1)+2(9+c-a)=2(-2-b+c+9+c-a)=2(-a-b+2c+7)$ ✓

Приравняем частные производные к нулю:

1. $2a-b-c-2=0 \Rightarrow 2a-b-c=2$
2. $-a+2b-c-5=0 \Rightarrow -a+2b-c=5$
3. $-a-b+2c+7=0 \Rightarrow -a-b+2c=-7$

Решим систему уравнений:

1. $2a-b-c=2$
2. $-a+2b-c=5$
3. $-a-b+2c=-7$

Вычтем из уравнения (1) уравнение (2):

$(2a-b-c)-(-a+2b-c)=2-5$

$3a-3b=-3$

$a-b=-1 \Rightarrow a=b-1$

Вычтем из уравнения (2) уравнение (3):

$(-a+2b-c)-(-a-b+2c)=$ ~~3b-3c=12~~ $5-(-7)$ $3b-3c=12$

$b-c=4 \Rightarrow c=b-4$

Подставим $a=b-1$ и $c=b-4$ в уравнение (1):

$2(b-1)-b-(b-4)=2$

$2b-2-b-b+4=2 \quad 2=2$

Подставим $a=b-1$ и $c=b-4$ в уравнение (2):

$-(b-1)+2b-(b-4)=5$

$-b+1+2b-b+4=5 \quad 5=5$

Подставим $a=b-1$ и $c=b-4$ в уравнение (3):

$-(b-1)-b+2(b-4)=-7$

$-b+1-b+2b-8=-7 \quad -7=-7$

Все 3 уравнения сводятся к тождествам. Это означает, что одно из уравнений можно выразить через 2 других.

Подставим $a=b-1$ и $c=b-4$ в выражение $f(a,b,c)$:

$f(b)=(7+(b-1)-b)^2+(2+b-(b-4))^2+(9+(b-4)-(b-1))^2$

$f(b)=(7-1)^2+(2+4)^2+(9-4+1)^2=6^2+6^2+6^2=36+36+36=108$

Таким образом, минимальное значение выражения равно 108.

Ответ: 108.

7б

Место для скобы

ОРМО Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№2

Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни многочлена $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$. По теореме Виета имеем:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -1$

$x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 = -4$

$x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 = 0$

$x_1x_2x_3x_4 = 1$

Нам нужно найти:

$S = P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) + P(x_4)$

$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 - x + 506$

Разделим $P(x)$ на $Q(x)$ с остатком

$P(x) = (x^2+1)Q(x) + R(x)$

$P(x) = (x^2+1)(x^4+x^3-4x^2+1) + R(x)$

$P(x) = x^6 + x^5 - 4x^4 + x^2 + x^4 + x^3 - 4x^2 + 1 + R(x)$

$P(x) = x^6 + x^5 - 3x^4 + x^3 - 3x^2 + 1 + R(x)$

Следовательно,

$R(x) = P(x) - (x^6 + x^5 - 3x^4 - x^3 - 3x^2 + 1) = -x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 505$

Заметим, что

$-R(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + x - 505$,

Но $Q(x) = x^4 + x^3 - 4x^2 + 1$, поэтому $Q(x) - (-R(x)) = 1 - (x - 505)$ $= 506 - x$, т.е. $-R(x) = Q(x) - 506 + x$

$R(x) = -Q(x) + 506 - x$

Место для скобы

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Теперь, если x_i – корни $Q(x)$, то $Q(x_i)=0$ для $i=1,2,3,4$.

$P(x_i)=(x_i^2+1)Q(x_i)+R(x_i)=(x_i^2+1)\cdot 0+506-x_i$

$P(x_i)=506-x_i$

$P(x_1)+P(x_2)+P(x_3)+P(x_4)=(506-x_1)+(506-x_2)+(506-x_3)+(506-x_4)=4\cdot 506-(x_1+x_2+x_3+x_4)$

$S=4\cdot 506-(-1)=2024+1=2025$

Ответ: 2025 ✓ 7б

№3

Пусть $t=\sqrt{x^2+1}$. Тогда $t\geq 1$ и $x^2=t^2-1$

Подставляем в уравнение

$t^2-1-6t+11-\cos((x^2+\sqrt{2}x-4)/18)=0$

$t^2-6t+10-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0$

$(t-3)^2+1-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0$ ✓

Мы знаем, что $(t-3)^2\geq 0$ и $1-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}\geq 0$

Таким образом, уравнение может быть выполнено только в том случае, если $(t-3)^2=0$ и $1-\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=0$

Из первого уравнения получаем $t=3$, т.к. $t=\sqrt{x^2+1}$, то $x^2+1=9$ откуда $x^2=8$ и $x=\pm 2\sqrt{2}$

Место для скобы

ОРМО Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

Из второго уравнения получаем:

$\cos\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=1$, значит,

$\frac{x^2+\sqrt{2}x-4}{18}=2\pi k$, где k целое число. Подставляя

$x^2=8$, получаем $\frac{8+\sqrt{2}x-4}{18}=2\pi k$, откуда

$4+\sqrt{2}x=36\pi k$

$\sqrt{2}x=36\pi k-4$

$x=\frac{36\pi k-4}{\sqrt{2}}=\frac{36\pi k-4}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{36\pi k\sqrt{2}-4\sqrt{2}}{2}=(18\pi k-2)\sqrt{2}$

Т.к. мы знаем, что $x=\pm2\sqrt{2}$, то подставляя

$x=2\sqrt{2}$ получаем: $2\sqrt{2}=(18\pi k-2)\sqrt{2}$

$2=18\pi k-2$ $\quad 4=18\pi k$

$k=\frac{4}{16\pi}=\frac{2}{9\pi}$ – это не целое число, значит

неподходит.

Подставляем $x=-2\sqrt{2}$, получаем:

$-2\sqrt{2}=(18\pi k-2)\sqrt{2}$

$-2=18\pi k-2$ $\quad 0=18\pi k$

$k=0$ Таким образом $x=-2\sqrt{2}$ является решением, поскольку при этом $k=0$ – целое число.

Ответ: $-2\sqrt{2}$ ✓ 7б

Место для скобы

ОРМО
Открытая региональная межвузовская олимпиада

Общий балл	Дата	Ф.И.О. Жюри	Подпись

Шифр

№5

Пусть ребро куба равно a.
Введем систему координат так, чтобы
$A=(0,0,0)$, $B(=a,0,0)$, $C=(a,a,0)$, $D=(0,a,0)$, $A_1=(0,0,a)$,
$B_1=(a,0,a)$, $C_1=(a,a,a)$, $D_1=(0,a,a)$
A_1C_1 – перпендикулярна плоскости α. $\Rightarrow \vec{n}_\alpha=(1,1,0)$
CD_1 – имеет направ. вектор $\vec{CD_1}=D_1-C=(0,a,a)-(a,a,0)=(-a,0,a) \Rightarrow \vec{v}=(-1,0,1)$.
Пусть $\vec{n}_\beta=(x,y,z)$, т.к. $\vec{v}$ параллелен плоскости β, то $\vec{n}_\beta\cdot\vec{v}=0$, т.е. $-x+z=0$, откуда $z=x$. Тогда $\vec{n}_\beta=(x,y,z)$
угол φ – между плоскостями $\Rightarrow \cos(\varphi)=\frac{|x+y|}{\sqrt{2}\sqrt{2x^2+y^2}}$
Нужно максимизировать $|\cos(\varphi)|$. Пусть $y=kx$.
Тогда $\cos(\varphi)=\frac{|1+k|}{\sqrt{2(2+k^2)}}$. Пусть $f(k)=\frac{1+2k+k^2}{4+2k^2}$
$f'(k)=\frac{8+4k-4k^2}{(4+2k^2)^2}$
$f'(k)=0 \Rightarrow 8+4k-4k^2=0 \Rightarrow 2+k-k^2=0 \Rightarrow$
$k=2$ или $k=-1$
Если $k=2$, то $y=2x$ и $\vec{n}_\beta=(x,2x,x)$ Тогда
$\cos(\varphi)=\frac{3|x|}{\sqrt{2}\sqrt{6}|x|}=\frac{3}{\sqrt{12}}=\frac{3}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\varphi=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}=30^\circ$

Ответ: 30°

7б