

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	21.03	Коренькина Е.Е.	М

$$④ \quad \cos 2x + \cos^{2023} 2x + 2024 \cos^{2025} 2x = \sin x + \sin^{2023} x + 2024 \sin^{2025} x$$

Пусть $\cos 2x = m$, а $\sin x = n$

Рассмотрим $f(m)$ и $f(n)$

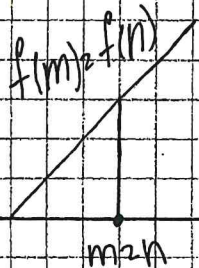
$$f(m) = m + m^{2023} + 2024 \cdot m^{2025}$$

$$f(n) = n + n^{2023} + 2024 \cdot n^{2025}$$

Найдем их производные:

$$f'(m) = 1 + 2023 m^{2022} + 2024 \cdot 2025 m^{2024} > 0$$

$$f'(n) = 1 + 2023 n^{2022} + 2024 \cdot 2025 n^{2024} > 0$$



Так как f ~~также~~ монотонно возрастает $\Rightarrow f(m) = f(n) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(\cos 2x) = f(\sin x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \sin x$$

$$\cos 2x = \sin x$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x \quad (\text{применим формулу двойного аргумента})$$

$$1 - \sin^2 x - \sin^2 x = \sin x$$

$$1 - 2\sin^2 x = \sin x$$

Перенесем все в правую часть

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$$

$$\text{Пусть } \sin x = t$$

$$\sin x = t$$

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

$$2t^2 + t - 1 = 0$$

$$D = 1 + 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 = 3^2$$

$$t_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$t_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$$

Сделаем замену:

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = -1$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k, n \in \mathbb{Z}$$

отбросим

$$③ \quad P(17) = 2024 \Rightarrow P(101) =$$

$$P(17) = 2024 \Rightarrow P(17) - 2024 = 0$$

$$P(101) = 2024 \Rightarrow P(101) - 2024 = 0$$

Значит, числа 17 и 101 являются корнями многочлена

$P(x) - 2024$ с целыми коэффициентами 17 и 101 являются делителями числа:

$$\frac{P_0 - 2024}{P_n}$$

Так как 17 и 101 взаимно простые, число $\frac{P_0 - 2024}{P_n}$ имеет вид:

$$17 \cdot 101 \cdot k, \text{ где } k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{P_0 - 2024}{P_n} = 17 \cdot 101 \cdot k$$

$$A_0 = 2024 = 17 \cdot 101 \cdot k \cdot A_n$$

$$A_0 = 17 \cdot 101 \cdot k A_n + 2024$$

$$A_0 = 1717 \cdot k A_n + 2024, \text{ где } k A_n \in \mathbb{Z}$$

По условию: $-999 < A_0 < 999$

$$-999 < 1717 \cdot k A_n + 2024 < 999$$

$$-999 - 2024 < 1717 \cdot k A_n < 999 - 2024$$

$$-3023 < 1717 \cdot k A_n < -1025 \quad / : 1717$$

$$-\frac{3023}{1717} < \frac{1717 \cdot k A_n}{1717} < \frac{-1025}{1717}$$

$$-1,76 < k A_n < -0,597$$

Так как $k A_n \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ оно равно $k A_n = -1$

$$\text{Значит } A_0 = 1717 \cdot (-1) + 2024 =$$

$$= -1717 + 2024 = 307$$

Ответ: 307

2)

Рассмотрим неравенство из условия

$$y^2 - x^2 > y - x$$

Разложим левую часть неравенства:

$$(y-x)(y+x) > y-x$$

Разделим неравенство на $y-x$, при условии $y \neq x$

$$y+x > 1$$

Возведем обе части в куб:

$$(y+x)^3 > 1$$

$$y^3 + 3xy^2 + 3x^2y + x^3 > 1$$

Докажем, что $y^3 - x^3 > y - x$

~~Раз~~ Разность кубов:

$$(y-x) \quad y^3 - x^3 = (y-x)(y^2 + xy + x^2)$$

Из неравенства $(y+x)^3 > 1$ следует, что $y^2 + xy + x^2 > 1$, так как x и y не равны в интервале $(0, \frac{1}{2})$

$$\text{Значит } y^3 - x^3 > y - x$$

①

Предположим, что четырехзначное число имеет вид: ~~abcd~~, где ~~abcd~~ - цифры

Тогда сумма равна ~~abcd~~ $m+n+k+l$

Отсюда следует отношение числа к сумме его

$$\text{цифр равно: } \frac{mnlk}{m+n+k+l}$$

$$\frac{mnlk}{m+n+k+l} \geq$$

$$\frac{mnlk}{m+n+k+l} \geq \frac{1000m + 100n + 10k + l}{m+n+k+l} =$$

$$\geq \frac{mnlk}{m+n+k+l} + \frac{999m + 99n + 9k}{m+n+k+l} \geq$$

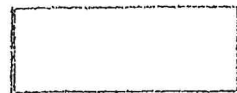
$$\geq 1 + \frac{999m + 99n + 9k}{m+n+k+l}$$

Отсюда получаем, что $m \neq 0, n \geq 1, l \geq 9$

$$1 + \frac{999 + 99n + 9k}{1+n+k+9}$$

$$\text{при } n \geq 0 \text{ и } k \geq 0; \quad 1 + \frac{999}{10} \geq 100,9 \quad (1009)$$

$$\text{при } n \geq 9 \text{ и } k \geq 9; \quad 1 + \frac{972 + 999}{28} \geq 71,4 \quad (1999)$$



$$\text{при } n=9, k=0, 1 + \frac{999+81}{19} = 100,47 \quad (\text{~~109~~ } \overset{m \ n \ k \ l}{1909})$$

$$\text{при } n=0, k=9, 1 + \frac{999+81}{19} = 57,84 \quad (\text{~~109~~ } \overset{m \ n \ k \ l}{1909})$$

Ответ 1099

X