Шифр 08529

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
~~30~~ 32	23.03.24	[illegible]	

1	2	3	4	5
7	~~3~~ 5	7	7	6

2 1) $0 < x < \frac{1}{2}$, $0 < y < \frac{1}{2}$

2) $y^2 - x^2 > y - x$

~~5~~ 3

$(y-x)(y+x) = y^2 - x^2 \Rightarrow (y-x)(y+x) > (y-x)\cdot 1$

$0 < x+y < 1 \Rightarrow (y-x) < 0$ (ИНАЧЕ ЕСЛИ $y-x>0$, то $(y-x)(y+x) < (y-x)\cdot 1$)

?

$y^2 + xy + x^2 < y^2 + 2xy + x^2 = (y+x)^2 < 1$

?

$y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) > (y-x)$

3 $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$; $a_i \in \mathbb{Z}$, $i = 0, 1, \ldots, n$

1) $P(17) = P(101) = 2024$

2) $|a_0| < 999$

$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x \vdots x \quad \forall x \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$P(17) = 17 q_1 + a_0$ НОД$(17, 101) = 1$

7

$P(101) = 101 q_2 + a_0$ $q_1, q_2 \in \mathbb{Z}$

$101 q_2 = 17 q_1 \Rightarrow q_2 \vdots 17$, $q_1 \vdots 101 \Rightarrow q_1 = 101 q_3$, $q_2 = 17 q_3$ $q_3 \in \mathbb{Z}$

$P(17) = P(101) = 1717 q_3 + a_0 = 2024 \Rightarrow a_0 = 2024 - 1717 q_3$

Пусть $q_3 \le 0$, тогда $a_0 \ge 2024 > 999 \Rightarrow q_3 > 0$

Пусть $q_3 \ge 2$, тогда $a_0 \le 2024 - 1717 \cdot 2 = 2024 - 3434 = -1410 < -999 \Rightarrow q_3 < 2$

$q_3 = 1$ $a_0 = 2024 - 1717 = 307$ $|307| < 999$

Ответ: 307

4. $\cos(2x) + \cos^{2023}(2x) + 2024 \cos^{2025}(2x) = \sin(x) + \sin^{2023}(x) + 2024 \sin^{2025}(x)$

$P(x) = x + x^{2023} + 2024 x^{2025} \Rightarrow$ Необходимо найти x, при котором $P(\cos(2x)) = P(\sin(x))$

$P(\cos(2x)) = P(\sin(x))$

Шифр 08529

$P'(x) = 1 + 2023x^{2022} + 2024\cdot 2025x^{2024} > 0$

$P(x)$ возрастает на $\mathbb{R}$,

тогда $P(a) = P(b) \Leftrightarrow a = b$

75

ТОГДА $\cos(2x) = \sin(x)$

$1 - 2\sin^2 x = \sin(x)$

$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

$2(\sin x + 1)(\sin x - \frac{1}{2}) = 0$

$$\left[\begin{array}{l} \sin(x) + 1 = 0 \\ \sin(x) - \frac{1}{2} = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

1\. Обозначим через S сумму цифр числа $\overline{abcd}$ $\quad 1 \le S \le 36$

Найдем наименьшие числа при различных S и их отношение к S

$1 \le S \le 10$: $\overline{100k}$, где $k = S - 1$ $\quad \frac{\overline{100k}}{S} = \frac{1000+k}{k+1} = \frac{999}{k+1} + 1 \to \min$ при $k = 9$

$11 \le S \le 19$: $\overline{10k9}$, где $k = S - 10$ $\quad \frac{\overline{10k9}}{S} = \frac{1009+10k}{k+10} = \frac{909}{k+10} + 10 \to \min$ при $k = 9$

$20 \le S \le 28$: $\overline{1k99}$, где $k = S - 19$ $\quad \frac{\overline{1k99}}{S} = \frac{1099+100k}{k+19} = 100 - \frac{801}{k+19} \to \min$ при $k = 1$

$29 \le S \le 36$: $\overline{k999}$, где $k = S - 27$ $\quad \frac{\overline{k999}}{k+27} = \frac{999+1000k}{k+27} = 1000 - \frac{26001}{k+27} \to \min$ при $k = 2$

$\frac{1009}{10}$; $\frac{1099}{19}$; $\frac{1199}{20}$; $\frac{2999}{29}$

$\frac{1009}{10} = \frac{2018}{20} > \frac{1199}{20}$

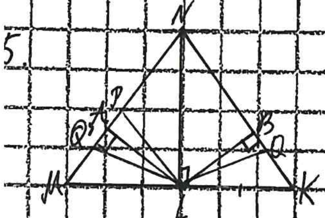
70

$\frac{1099}{19} = \frac{21980}{19\cdot 20} < \frac{22781}{19\cdot 20} = \frac{1199}{20}$

$\frac{1099}{19} = \frac{31871}{19\cdot 29} < \frac{56981}{19\cdot 29} = \frac{2999}{29}$

Ответ: 1099

5\.



$MN = NK = MK \quad \angle N = \angle M = \angle K = 60^\circ \quad S_{MKN} = 1$

L – середина $MK \Rightarrow NL \perp MK \Rightarrow NK$ и NM симметричны относительно NL

$LQ = LP$, $PQ \parallel MK \Rightarrow NP = NQ \Rightarrow MP = KQ$

Пусть $LP \perp MN$, то $LQ \perp KN$, так как перпендикуляр – единственный отрезок кратчайшего расстояния между точкой и прямой. $d(L, NM) = d(L, NK)$

Тогда LP симметричен LQ относительно NL, тогда $NP = NQ \Rightarrow PQ \parallel MK$.

Следовательно $LP \perp NM$, $LQ \perp NK$

Проведём перпендикуляры LA и LB ~~на~~ к NM и NK $\quad NB > NK$

Отразим LQ относительно LN, получим LQ', который не совпадает с LP

$\left.\begin{array}{l} LA \text{ – общий катет} \\ LQ' = LP \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle LAP = \triangle LAQ' \Rightarrow AP = AQ' \Rightarrow$ P и Q' симметричны относительно LA

В силу симметрии без ограничения общности возьмем $KQ < KB$, тогда $MP > MB$

$\cancel{\angle QBL} = \angle QLB = \angle Q'LA = \angle PLA$

$\angle QLP = \angle BLA + \angle QLB - \angle PLA = \angle BLA = 180^\circ - \angle N = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

$PQ^2 = PL^2 + QL^2 - 2\,PL \cdot QL \cdot \cos\angle QLP = QL^2(2 - 2\cos 120^\circ) = QL^2(2 + 2\cdot\frac{1}{2}) = 3QL^2 \Rightarrow PQ = QL\sqrt{3}$

$\frac{1}{2} MK^2 \cdot \sin 60^\circ = S_{MKN} = 1 \Rightarrow MK = \sqrt{\frac{1}{\sin 60^\circ}} = \sqrt{\frac{2}{\frac{\sqrt{3}}{2}}} = \frac{2}{\sqrt[4]{3}}$

$LK = \frac{MK}{2} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$, $\quad BL = LK \cdot \sin\angle K = \frac{1}{\sqrt[4]{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$

$BL < QL < LK$ $\quad$ ($QL \leq LK$, если Q и K могут совпадать)

$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} < QL < \frac{\sqrt[4]{3}}{2}$ $\qquad \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3}}{2} < PQ < \frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}}$

$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt[4]{3}} < PQ < \frac{\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt{3}}{2}$ $\qquad \frac{\sqrt[4]{27}}{2} < PQ < \frac{9}{\sqrt[4]{3}}$

Ответ: от $\frac{\sqrt[4]{27}}{2}$ до $\sqrt[4]{3}$

5