Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004258

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ЗЫКОВ
	Имя	ТИМУР
	Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	08 (Число) 10 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	РФ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Республика Саха (Якутия)
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Якутск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБНОУ РС(Я) РЛИ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Тимур

Место для скобы

Шифр 004258

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
25 б	6.04.21	Гендрина И.Ю.	

1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}$.

Допустим, что $x>1$.

Тогда $\frac{1}{x}<1$, и $\frac{1}{x}>0$. Аналогично, $\frac{1}{x^2+2020}>0$, но $\frac{1}{x^2+2020}<1$.

Чтобы $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}$ — была целой, то $\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+2020}$, т.к. $0<\frac{1}{x}, \frac{1}{x^2+2020}<1$.

т.е. $x^2-x+2020=0$, $D=1-4\cdot2020<0$. $\Rightarrow$ Нет решений при $x>1$.

Допустим, что $x<-1$.

Тогда $-\frac{1}{x}<1$, и $-\frac{1}{x}>0$. Аналогично, $0<\frac{1}{x^2+2020}<1$.

7 б

~~Чтобы~~ $\cancel{\frac{1}{x^2+2020}+\left(-\frac{1}{x}\right)}$ ~~была целой, то~~ $\cancel{\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2+2020}}$, ~~т.к.~~ $\cancel{0<\frac{1}{x^2+2020}, -\frac{1}{x}<1}$.

~~т.е.~~ $\cancel{-x^2-2020-x=0}$, $\cancel{D=1-8080<0}$ ~~$\Rightarrow$ Нет решений при~~ $\cancel{x<-1}$.

~~Допустим, что~~ $\cancel{-1<x<0}$.

~~Тогда~~ $\cancel{\frac{1}{x}>-1}$ $\cancel{\frac{1}{x}<-1}$ ~~...~~

Значит, $0<-\frac{1}{x}<1$ и $0<\frac{1}{x^2+2020}<1$. $\Rightarrow$ $0<\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}<2$.

Тогда $\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}=1$. Т.к. между 0 и 2 только 1.

А таких x нет т.к. $\frac{1}{x^2+2020}=\frac{x+1}{x}$, но $\frac{1}{x^2+2020}<\frac{x+1}{x}$ при $x<-1$

~~Допустим, что~~ $\cancel{x<0}$ ~~и~~ $\cancel{x>-1}$. Значит, $-1\leq x\leq 1$.

~~Тогда~~ $\cancel{\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}>0}$ ~~и~~ $\cancel{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}}$ ~~целые~~

1	2	3	4	5
7	7	4	1	6

$-1 \le x \le 1$: Значит $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2020}$ и $x - \frac{1}{x}$ - целые $\Rightarrow$ $x - \frac{1}{x^2+2020}$ - целое. т.к. $-1 \le x \le 1$, то $\frac{1}{x^2+2020} \ge \frac{1}{2020}$ и $\frac{1}{x^2+2020} \le \frac{1}{2021}$.

Следовательно, для $-1 \le x \le 1$ ~~тоже~~ нет таких x.

Ответ: Нет, не существует.

(2) $\sin x + \sin^3 x + 2021 \sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2021 \cos^5 2x$

Обозначим за $f(t) = t + t^3 + 2021 t^5$.

Тогда $f(\sin x) = f(\cos 2x)$. Т.к. $\sin x, \cos 2x \in [-1; 1]$, то $t \in [-1; 1]$

Заметим, что $f'(t) = 1 + 3t^2 + 2021 \cdot 5 \cdot t^4 > 0$ всегда. Значит $f(t)$ возрастающая ф-я на отрезке $t \in [-1; 1]$.

Значит $f(t_1) = f(t_2)$ тогда и только тогда когда $t_1 = t_2$.

Т.е. $\sin x = \cos 2x \Rightarrow \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$.

7 б

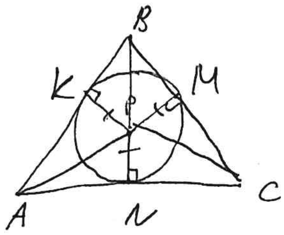
$$\left[\begin{array}{l} \sin_1 x = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin_2 x = \frac{-4}{4} = -1 \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \\ x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k \end{array}\right.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

$x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$.

(5.)



Рассмотрим $\triangle APB$, $\triangle BPC$ и $\triangle APC$.

Для них $S_{\triangle APB} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle APC} = S = \frac{1}{2} KP \cdot AB + \frac{1}{2} BC \cdot PM + \frac{1}{2} AC \cdot PN$.

$$\boxed{\frac{\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}}{3} \ge \sqrt[3]{\frac{BC \cdot AC \cdot AB}{PM \cdot PN \cdot PK}}}$$ ~~нер-во~~. Тогда $\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK}$ min

6 б

Когда $PM \cdot PN \cdot PK$ - max. А все это центр вписанной окружности.

т.к. $PK = PM = PN$.

Место для скобы

Шифр 004258

Нет доказат. для общего случая

4б

(3.) $p(t)=t^n+5t^{n-1}+3,\ n>1.$

Допустим, что $n=2$. Тогда $p(t)=t^2+5t+3$.

$D=25-12=\sqrt{13}$. Значит $t^2+5t+3=\left(t-\frac{5-\sqrt{13}}{2}\right)\left(t-\frac{5+\sqrt{13}}{2}\right)$.

$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$. т.к. t и другие числа это разные члены, что $\frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$ — не целое, то разложить $p(t)$ не получится.

(4.)

$$\frac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\,x}+\frac{\sqrt[3]{2021^4}\,x}{k+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{k}{x(x^2+\sqrt[3]{2021^4})}$$

Заменим $c=\sqrt[3]{2021^4}$

$$\frac{x^3}{k+cx}+\frac{cx}{k+x^3}+\frac{k}{x^3+cx}\le\frac{3}{2}$$

при $k\to0$: $\frac{x^3}{cx}+\frac{cx}{x^3}\le\frac{3}{2}$ - не правда, т.к. $a+\frac{1}{a}>2$ $(x>0,c>0)$

при $k\to\infty$: $0\le\frac{3}{2}-\frac{k}{x^3+xc}$ - тоже не правда.

т.к. при изменении k функция не должна терять знак производной, то функция монотонна. $f(x)=\frac{x^3}{k+cx}+\frac{cx}{k+x^3}+\frac{k}{x^3+cx}$ при $x>0$ монотонна.

Ошибочные рассуждения.

Ответ: Таких k нет.

Ответ неверный

1б