ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004483

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	З В Е Р Е В А
	Имя	А Н Н А
	Отчество	Д М И Т Р И Е В Н А
5.	Дата рождения	0 6 (число) 0 2 (месяц) 2 0 0 4 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБНОУ "Лицей №84"

004483

№1. Чистовик.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$;

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=(-1)\cdot\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)$;

Значит, $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $x-\frac{1}{x}$ должны быть целыми.

Пусть $x-\frac{1}{x}=t$, $t\in Z$;

$\frac{1}{x}=x-t$; $y=\frac{1}{x}$ - гипербола; $y=x-t$ прямая, параллельная $y=x$,

т.к. $y=\frac{1}{x}$ симметрична относительно т.$(0;0)$, то рассмотрим часть в I координ. плоскости при $x>0$

Общий вид: $x=2^t$, $t\in N$;

Итого 30б

Подставим $x=2^t$ в I число:

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^{2t}+2021}$;

1	2	3	4	5
7	6	5	5	7

Пусть $\frac{1}{2^t}-\frac{1}{2^{2t}+2021}=a$, $a\in Z$;

$\frac{1}{2^{2t}+2021}=\frac{1}{2^t}-a=\frac{1-2^t\cdot a}{2^t}$;

$2^t=(1-a\cdot 2^t)(2^{2t}+2021)$;

7б

$2^t>0$; Пусть $2^t=b$;

$b=(1-ab)(b^2+2021)=b^2-ab^3+2021-2021ab$;

$b^2-ab^3-b+2021-2021ab=0$;

Если это куб. ур-ние имеет корни, то

$b_1+b_2+b_3=-1$;

Но т.к. $b=2^t>0$, то решений нет.

Значит, искомое x не существует.

Ответ: искомое число не существует.

1.

004483

№2. Чистовик

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$,

Пусть ~~t~~ $\sin 2x = t$, тогда $f(t) = \sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x$

Пусть $\cos 4x = p$, по условию $f(t) = f(p)$,

$f'(t) = 1 + 5t^4 + 9 \cdot 2020 t^8$, $D = 25 - 4 \cdot 9 \cdot 2020 < 0$, значит,

$f'(t) > 0$ на всей области значений?; как и

$f'(p) = 1 + 5p^4 + 9 \cdot 2020 p^8$; $D < 0$, значит, $f'(p) > 0$ на всей области значений; $\Rightarrow$?

Следовательно, $t = p$;

$\sin 2x = \cos 4x$;

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$;

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$;

Пусть $d = \sin 2x$, $d \in [-1; 1]$;

$2d^2 + d - 1 = 0$; $D = 1 + 4 \cdot 2 = 9$;

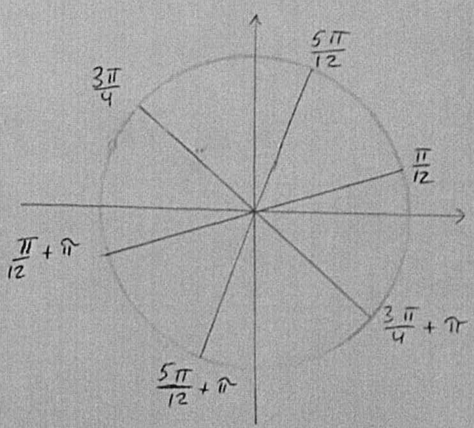
$d_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4}$; $d_1 = -1$; $d_2 = \frac{1}{2}$;

6 б

$\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1, \\ \sin 2x = \frac{1}{2}; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ 2x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k, k \in Z; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{-\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = (-1)^k \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} k, k \in Z; \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ x = \frac{\pi}{12} + \pi k, k \in Z; \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi t, t \in Z; \end{array}\right.$



Найдем объединение корней:

$\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$;

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}$, $n \in Z$.

004483

№3.

чистовик

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, n - целое число,

1) $p(t) = t^{n-1}\left(t + 5 + \frac{3}{t^{n-1}}\right) = \frac{t^n}{t}\left(5 + t + \frac{3t^n}{t^n}\right)$

$\frac{t^n}{t}$ - не яв-ся многочленом полож. степени с целыми коэфф.

2) $p(t) = t^n\left(1 + \frac{5}{t} + \frac{3}{t^n}\right)$,

t^n - не яв-ся многочленом полож. степени с целыми коэфф.,

$p'(t) = n \cdot t^{n-1} + 5(n-1)t^{n-2} = t^{n-2}(t + 5(n-1))$,

т.к. $n > 1$ и n - целое, то $p'(t) > 0$ на всей области опр.,

Значит, $p(t)$ возрастает на всей области опр.

Следовательно, $p(t)$ невозможно представить в виде произведения многочленов в положит. степени с целыми коэффициентами.

Ответ: невозможно.

Недост. обосн.

5 б

3.

№4. Чистовик

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\,x}{m+x^3}; \quad m>0,$$

$x>0$, т.к. решения нерав. должны быть положительными;

Пусть $a=\sqrt[3]{2020^4}\cdot x$, $a>0$; и $b=x^3$, $b>0$;

$$\frac{b}{m+a} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{b+a} - \frac{a}{m+b};$$

$$\frac{b}{m+a} + \frac{m}{b+a} + \frac{a}{m+b} \le \frac{3}{2};$$

$\frac{b}{m+a} + \frac{m}{b+a} + \frac{a}{m+b}$ – имеет миним. значение $\frac{3}{2}$ при условии $a=b=m$:

$$\left(\frac{a}{2a} + \frac{a}{2a} + \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\right)$$

нет обоснования

$x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\,x = m;$

$x^2 = \sqrt[3]{2020^4};$

$x = 2020^{\frac{2}{3}};$

$m = x^3 = 2020^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 2020^2 = 4080400.$

Ответ: $m = 4080400$.

5 б

Н.

Чистовик №5.

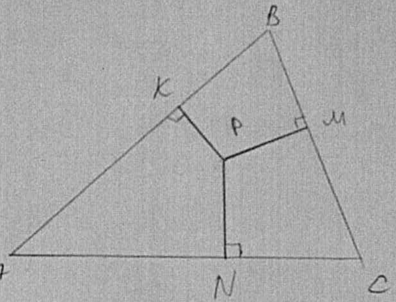
Дано:

$\triangle ABC$;

K, M, N – ортогональные проекции точки P на прямые BC, AC, AB;

Найти: т. P, чтобы

$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ – миним.;



Решение:

По неравенству о среднем

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} \geq 3\sqrt[3]{\frac{BC\cdot AC\cdot AB}{PM\cdot PN\cdot PK}},$$

т.е. $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет иметь минимальное значение при

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} = 3\sqrt[3]{\frac{BC\cdot AC\cdot AB}{PM\cdot PN\cdot PK}};$$

Данное равенство будет выполнятся только при $BC=AC=AB$, (значит, $\triangle ABC$ должен быть равносторонним) и при $PM=PN=PK=r$ – радиусы вписанной окружности (точки касания вписанной окр. со сторонами треугольника будут яв-ся ортогональными проекциями центра окружности на эти стороны, т.к. радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной). 7б

Значит, $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет минимальна, когда P – центр окр., вписанной в $\triangle ABC$.

Ответ: P – центр окр, вписанной в $\triangle ABC$.