Место для скобы

020687

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	10
4.	Фамилия	ЗОЛИН
	Имя	НИКИТА
	Отчество	АНДРЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	22 (Число) 11 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская обл.
7.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
8.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Асино)*	Томск
9.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ОГБОУ ТФТЛ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись золин

10.	Контактный телефон	89234274295
11.	e- mail	MrDelrus@yandex.ru
12.	Профиль в вк	https://vk.com/zolinniki
13.	**Документ, удостоверяющий личность**	6917 (серия) 791324 (номер) отделом УФМС России по Томской области в Октябрьском районе гор. Томска 25.12.2017 (кем и когда выдан)
14.	Из числа лиц с ограниченными возможностями по здоровью (инвалид) **(да/нет)**	нет
15.	Сирота **(да/нет)**	нет
16.	Победитель или призер олимпиады прошлого года **(да/нет)**	да

Место для скобы

Шифр 020687

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
35б	18.03.20	Гендрина	[подпись]

35 б

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

$\boxed{3}$ По условию $f_1(x_1)=0$; $f_2(x_2)=0$; $f_3(x_3)=0$; ... $f_{2020}(x_{2020})=0$, т.е.

$$a x_1^2+bx_1+c_1=0$$
$$a x_2^2+bx_2+c_2=0$$
$$\dots$$
$$a x_{2020}^2+bx_{2020}+c_{2020}=0$$

$$f_2(x_1)=a x_1^2+bx_1+c_2$$
$$f_3(x_2)=ax_2^2+bx_2+c_3$$
$$\dots$$
$$f_{2020}(x_{2019})=a x_{2019}^2+bx_{2019}+c_{2020}$$
$$f_1(x_{2020})=a x_{2020}^2+bx_{2020}+c_1$$

Тогда $f_2(x_1)+f_3(x_2)+\dots+f_{2020}(x_{2019})+f_1(x_{2020})=(ax_1^2+b_1x_1+c_2)+(ax_2^2+bx_2+c_3)+\dots$ $+(ax_{2019}^2+bx_{2019}+c_{2020})+(ax_{2020}^2+bx_{2020}+c_1)=(ax_1^2+ax_2^2+\dots+ax_{2020}^2)+(bx_1+bx_2+\dots+bx_{2020})+$ $+(c_1+c_2+\dots+c_{2020})=(ax_1^2+bx_1+c_1)+(ax_2^2+bx_2+c_2)+\dots+(ax_{2020}^2+bx_{2020}+c_{2020})=$ $=0+0+\dots+0=0$

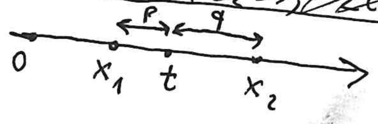
Ответ: 0

~~4. Лемма. Есть переменные $0<x_1<x_2$ Найдем тогда любые x_1', x_2', удовлетворяющие условиям: $0<x_1<x_1'<x_2'<x_2$ и $x_1x_2=x_1'x_2'$. Тогда x_1, x_2 такие, что $0<x_1<x_2$.~~

$\boxed{4.}$ Лемма Пусть есть x_1, x_2: $0<x_1\leq x_2$. Найдем t такое, чтобы: $t>0$; $t^2=x_1x_2$. Тогда $x_1+x_2\geq 2t$. Докажем это.

7 б

~~Т.к. $x_1+x_2>0$, $2t>0$, то $x_1+x_2\geq 2t \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2\geq (2t)^2$~~



Обозначим $t-x_1=p$; $x_2-t=q$

$t^2=(x_1+p)(x_2-q)$; $t^2=x_1x_2 \Rightarrow (x_1+p)(x_2-q)=x_1x_2 \Rightarrow$

Если $x_1\neq x_2 \Rightarrow t\neq x_1, t\neq x_2$ (из $t^2=x_1x_2$)

$\cancel{x_1x_2}+px_2-qx_1-pq=\cancel{x_1x_2} \Rightarrow px_2=qx_1+pq \Rightarrow$

$q(x_1+p)=px_2 \Rightarrow q=p\cdot\frac{x_2}{x_1+p}$. Но $x_1+p=t$; $x_2>t \Rightarrow \frac{x_2}{x_1+p}>1 \Rightarrow \boxed{q>p}$

Шифр 020687

$2t=(x_1+p)+(x_2-q)=(x_1+x_2)+(p-q)$. Но $p-q<0$ (т.к. $q>p$) $\Rightarrow$ $2t<x_1+x_2$.

Если $x_1=x_2 \Rightarrow t=x_1$ (т.к. $t^2=x_1^2$) $\Rightarrow 2t=x_1+x_1=x_1+x_2$

Итак, $x_1+x_2 \geq 2t$. Лемма доказана.

Нам нужно доказать, что при $a \geq 0$; $b \geq 0$ $(a+b)(ab+505^2) \geq 2020ab$. Оценим снизу левую часть. Воспользуемся леммой, заменив a и b на t: $ab=t^2$; $a+b \geq 2t$

$(a+b)(ab+505^2) \geq 2t(t^2+505^2) = 2t(t^2+505^2)+2020t^2-2020t^2=$

$=2t(t^2-1010t+505^2)+2020t^2=2t(t^2-2\cdot 505\cdot t+505^2)+2020t^2=$

$=2t(t-505)^2+2020t^2$. Т.к. $t \geq 0$, то $2t(t-505)^2 \geq 0$. Тогда из $(a+b)(ab+505^2) \geq 2t(t-505)^2+2020t^2 \Rightarrow (a+b)(ab+505^2) \geq 2020t^2$.

Но $t^2=ab \Rightarrow (a+b)(ab+505^2) \geq 2020ab$, ч.т.д.

1) $x^2-10[x]+9=0$

$t=[x] \Rightarrow t \leq x < t+1$

Пусть $[x] \leq 0$. Тогда $a=-10[x]+9 \geq 9$ (т.к. $-10[x] \geq 0$)

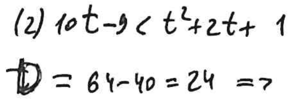
$x^2+a \geq x^2+9$. Но тогда $x^2+a=0$ не имеет решений. Тогда

$[x]>0 \Rightarrow t \geq 0 \Rightarrow$ из $t \leq x<t+1 \Rightarrow t^2 \leq x^2 < t^2+2t+1$

Но т.к. $x^2-10t+9=0$, то $x^2=10t-9$. Тогда

$t^2 \leq 10t-9 < t^2+2t+1$. Решим отдельно $t^2 \leq 10t-9$ и $10t-9<t^2+2t+1$ и найдем пересечение множеств решений.

(1) $t^2 \leq 10t-9 \Leftrightarrow t^2-10t+9 \leq 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-9) \leq 0$



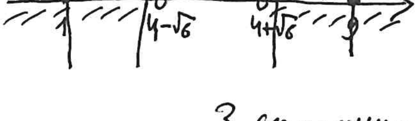
$t \in [1;9]$ (ограничение №1)

(2) $10t-9<t^2+2t+1 \Leftrightarrow 0<t^2-8t+10 \Leftrightarrow t^2-8t+10>0$. Найдем корни.

$D=64-40=24 \Rightarrow t_{1,2}=\frac{8\pm 2\sqrt{6}}{2}=4\pm\sqrt{6}$, т.е. $t_1=4-\sqrt{6}$; $t_2=4+\sqrt{6}$

Причем $4-\sqrt{6}>4-\sqrt{9}=4-3=1$; $4+\sqrt{6}>4-\sqrt{6}$; $4+\sqrt{6}<4+\sqrt{9}=7<9$.

Итак, $1<4-\sqrt{6}<4+\sqrt{6}<9$. Найдем пересечение ограничений



Итак, ~~...~~ мы получим ограничение на t:

$t \in [1; 4-\sqrt{6}) \cup (4+\sqrt{6}; 9]$

3 страница

7 б

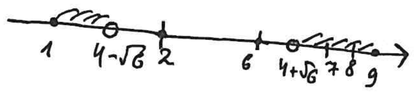
о для
бы

Шифр 020687

$4-\sqrt{6} < 4-\sqrt{4} = 2$, $4+\sqrt{6} > 4+\sqrt{4} = 6$.

Но $t=[x]$, т.е. t – целое. Т.к. $t\in[1;4-\sqrt{6}]\cup(4+\sqrt{6};9]$, то t может принимать лишь значения 1, 7, 8, 9

(т.к.



)

$t=1$: $x^2-10+9=0 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x_1=1;\ x_2=-1$

$[x_1]=1$ ($t=1$ выполняется, $x_1=1$ – решение)

$[x_2]=-1$ ($t=1$ не выполняется, $x_2=-1$ – не решение)

$t=7$: $x^2-61=0$; $x^2=61$; $x_1=\sqrt{61}$; $x_2=-\sqrt{61}$

$t>0 \Rightarrow x>0$ ($[x]=t$) $\Rightarrow x_2=-\sqrt{61}$ не является решением.

$\sqrt{61}>\sqrt{49}=7$; $\sqrt{61}<\sqrt{64}=8 \Rightarrow [\sqrt{61}]=7$ – верно, $x=\sqrt{61}$ – решение

$t=8$: $x^2-71=0$; $x^2=71$ $\quad t>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x^2=71 \Leftrightarrow x=\sqrt{71}$

$\sqrt{64}<\sqrt{71}<\sqrt{81} \Rightarrow 8<\sqrt{71}<9 \Rightarrow [\sqrt{71}]=8$ – верно, $x=\sqrt{71}$ – решение

$t=9$: $x^2-81=0$; $t>0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow x^2=81 \Leftrightarrow x=9$; $[9]=9$ – верно $\Rightarrow$ $x=9$ – решение.

Итак, мы получили оценку на $[x]$ и сделали полный перебор возможных значений $\Rightarrow$ нашли все корни

Ответ: $x\in\{1;\sqrt{61};\sqrt{71};9\}$

2. Оценим минимальное время и приведем пример.

I. Оценка. ~~Первый учитель проверяет задачи на 2 минуты дольше чем второй, а теорию на 3 минуты дольше.~~

Будем рассматривать принятие 1-го зачета как единицу работы, а скорость принятия как производительность (зачет/мин.)

Учителей назовем А и Б, принятие зачета по задачам и теории будем обозначать за 1 и 2 соответственно. Для оценки снизу можем допустить, что учителя могут одновременно принять зачет у одного ученика по одной теме (это способствует оценке снизу).

4 страница

Шифр 020687

Первый учитель проверяет задачи на 2 мин. дольше, чем второй, а теорию на 3 мин. Таким образом для выигрыша во времени первый должен проверить как можно меньше теории. Пусть всю теорию проверяет второй учитель. На это у него уйдет $4 \cdot 25 = 100$ мин. За это время первый учитель примет $\frac{100}{5} = 20$ зачетов по задачам. $P_{A_1} = \frac{1}{5}$; $P_{Б_1} = \frac{1}{3}$; $P_{общ_1} = \frac{8}{15}$

7б

$t = \frac{5}{\frac{8}{15}} = \frac{75}{8}$ (5 — зачетов осталось; $\frac{8}{15}$ — $P_{общ_1}$). Тогда у учителей на проверку уйдет не менее $100 + \frac{75}{8}$ мин., т.е. $109 + \frac{3}{8}$ мин, но в силу условия задачи они будут проверять целое кол-во минут (т.к. на самом деле невозможно, что у одного ученика по одной тематике будут принимать зачет два разных учителя по частям).

Итак, $t \geq 110$ мин.

II. Пример. Разобьём 25 учеников на группы по 5 и рассмотрим каждую группу в отдельности

тема \ уч.	1	2	3	4	5
задачи					
теория					

Сначала пусть первый учитель примет зачет по теории у ученика №5. В это время второй учитель примет теорию у ученика номер №1, затем начнет принимать теорию у ученика №2. Т.к. второй проверяет быстрее, то когда первый учитель проверит №5 №1 будет свободен и он сразу после №5 может принять №1 задачи. На №5 и №1 у первого уйдет $5 + 7 = 12$ мин. Второй учитель после №1 пусть будет проверять теорию у №2 и №3. На это у него уйдет $3 \cdot 4 = 12$ мин, т.е. учителя закончат одновременно. Пусть первый учитель после этого проверит задачи у 2, 3, а второй примет зачеты у №4 и задачи у №5. Первому потребуется $2 \cdot 5 = 10$ мин, второму $4 + 2 \cdot 3 = 10$ мин, т.е. учителя закончат одновременно. При такой стратегии в любой момент времени учителя принимали зачет у разных учеников, т.е. такое возможно. На проверку такой группы учителям потребовалось бы $10 + 12 = 22$ мин. Всего групп $\frac{25}{5} = 5$, => работая так с каждой группой они примут все зачеты за $5 \cdot 22 = 110$ мин, а за меньшее время в силу оценки они все принять не смогут.

Ответ: 110 минут.

Примечание Схема проверки одной группы выглядит так:

	1	2	3	4	5
З.	A_2	A_3	A_4	$Б_5$	$Б_6$
Т.	$Б_1$	$Б_2$	$Б_3$	$Б_4$	A_1

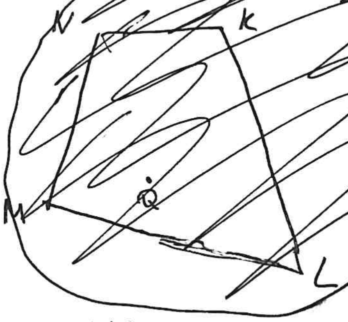
($A_1, A_2, \dots A_4$ — порядок, в котором проверял первый учитель, аналогично для Б и ($Б_1, Б_2, \dots Б_6$) второго учителя)

о для
бы

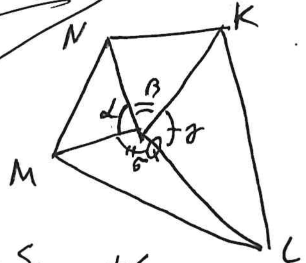
$\boxed{5.}$

Шифр 20687

~~Т.к. $MQ^2+NQ^2+KQ^2+LQ^2 \geq MQ^2+KQ^2$~~



Часть 1 Q внутри или на стороне.



$2S = 2(S_{MQN}+S_{NQK}+S_{KQL}+S_{MQL})$.

$MQ^2+NQ^2+LQ^2+KQ^2 = MQ\cdot NQ\cdot\sin\alpha+NQ\cdot KQ\cdot\sin\beta+\ldots+NQ\cdot QL\cdot\sin\delta)$

$MQ\cdot NQ\sin\alpha+\ldots+MQ\cdot QL\cdot\sin\delta \leq MQ\cdot NQ+NQ\cdot KQ+KQ\cdot QL+MQ\cdot QL.$

($\sin\varphi\geq 0$, т.к. все углы $\leq 180^\circ$)

$a=MQ$; $b=NQ$; $c=LQ$; $d=KQ$

Тогда $a^2+b^2+c^2+d^2 \leq ab+bc+cd+da$.. Без ограничения общности $a\geq b\geq c\geq d$

Возьмем два упорядоченных множества $(a;b;c;d)$. В силу транснеравенства

$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ab+bc+cd+da$, причем равенство лишь при $a=b=c=d$.

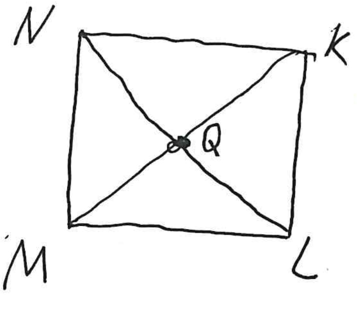
Но $a^2+b^2+c^2+d^2\leq ab+bc+cd+da \Rightarrow a^2+b^2+c^2+d^2=ab+bc+cd+da \Leftrightarrow a=b=c=d$.

Но если $MQ=NQ=LQ=KQ=x$, то

$x^2+x^2+x^2+x^2=x^2\sin\alpha+x^2\sin\beta+x^2\sin\gamma+x^2\sin\delta$

$4=\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma+\sin\delta$. Т.к. $\sin\varphi\leq 1$, то $\sin\alpha=\sin\beta=\sin\gamma=\sin\delta=1 \Rightarrow$

$\alpha=\beta=\gamma=\delta=90^\circ$ (они ≥ 0; $\leq 180^\circ$)



Т.е. в MNKL выбрана Q такая, что $\angle MQN=\angle NQK=\angle KQL=\angle LQN=90^\circ$

Тогда $\angle MQN+\angle NQK=180^\circ$; $\angle NQK+\angle KQL=180^\circ \Rightarrow Q=MK\cap NL$.

Причем $MQ=NQ=KQ=QL \Rightarrow MNKL$ — прямоугольник. Но т.к. углы между диагоналями прямые, то MNKL — квадрат.

Ответ: MNKL — квадрат, Q — точка пересечения диагоналей квадрата

7 б

Примечание. Докажем более строго, что MNKL — ~~прямоугольник~~ квадрат. $\triangle MNQ=\triangle LQK$ ($\angle MQN=\angle KQL$; $MQ=QN=QK=QL$),

$\Rightarrow MN=KL$. Аналогично $\triangle NQK=\triangle LQM \Rightarrow NK=ML$. $\begin{cases} MN=KL \\ NK=ML \end{cases} \Rightarrow MNKL$ — параллелограмм.

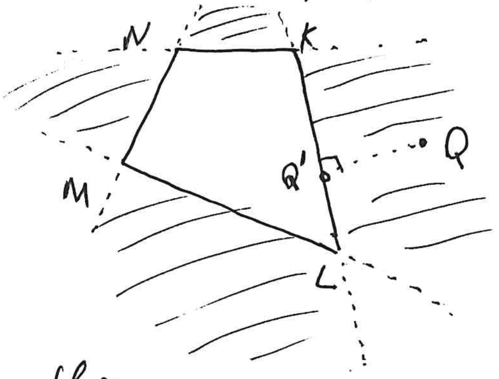
$MK=2MQ=2QL=NL \Rightarrow$ в параллелограмме равны диагонали $\Rightarrow$ он прямоугольник.

Но $\angle MQN=90^\circ \Rightarrow$ он ромб. MNKL и ромб и прямоугольник одновременно $\Rightarrow$ он квадрат

Шифр 20687

Часть 2 Q снаружи.

Опустим проекцию Q на какую-либо прилежащую сторону или её продолжение. Случай №1



(в этом случае проецируем на сторону)

$KQ^2 > KQ'^2$; $LQ^2 > LQ'^2$. $\angle NQ'Q = \angle NQ'K + 90^\circ > 90^\circ \Rightarrow$

$NQ^2 > NQ'^2$. Аналогично $MQ^2 > MQ'^2$

Тогда $MQ'^2 + LQ'^2 + KQ'^2 + NQ'^2 < MQ^2 + LQ^2 + KQ^2 + NQ^2$

По аналогии с частью 1 $MQ' = a$; $NQ' = b$; $LQ' = c$; $KQ' = d$.

В силу транснеравенства

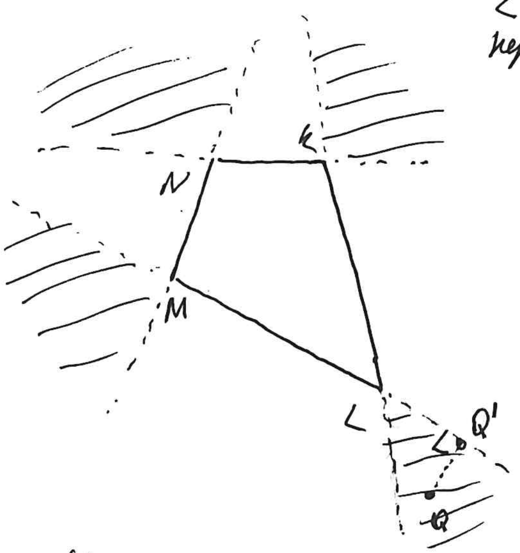
$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant ab + cd + bc + ad \geqslant ab\sin\alpha + bc\sin\beta + cd\sin\gamma + ad\sin\delta = 2S$.

Т.е. $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 2S$.

Тогда $MQ^2 + LQ^2 + KQ^2 + NQ^2 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant 2S \Rightarrow$

$MQ^2 + LQ^2 + KQ^2 + NQ^2 > 2S \Rightarrow$ равенство невозможно

{ Случай „на продолжении стороны" аналогичен данному, но уже два из неравенств $KQ^2 > KQ'^2$; $LQ^2 > LQ'^2$; $MQ^2 > MQ'^2$; $NQ^2 > NQ'^2$ превращается в равенство, но сумма левых частей будет все равно строго больше суммы правых }



(в этом случае проецируем на продолжение стороны)

Случай №2

$MQ^2 > MQ'^2$; $LQ^2 > LQ'^2$. $\angle NQ'Q = \angle NQ'M + \angle MQ'Q =$

$= \angle NQ'M + 90^\circ > 90^\circ \Rightarrow NQ^2 > NQ'^2$. Аналогично $KQ^2 > KQ'^2$.

Дальнейшие рассуждения аналогичны случаю №1.

Итак, такая ситуация тоже невозможна.