

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23	18.03.20	Геворкянц А.Ю.	М

№1 Пусть $x=1$, тогда: $(1-y)^2 + (y-2 \cdot 1 + 2)^2 = \frac{1}{2}$

$$1 - 2y + y^2 + y^2 = \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$$

$$2 - 4y + 2y^2 + 2y^2 = 1$$

$$4y^2 - 4y + 1 = 0$$

$$D = 0$$

$$y = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Ответ: $(1; \frac{1}{2})$

№2 1 час 6 мин = 1,1 часа; 2 часа 24 мин = 2,4 часа

$$t = \frac{5}{v} \begin{cases} \frac{2}{v} + \frac{3}{v_6} + \frac{2}{v_m} = 1,1 \quad | \cdot 5 \\ \frac{5}{v} + \frac{8}{v_6} + \frac{30}{v_m} = 2,4 \quad | \cdot 2 \\ \frac{4}{v} + \frac{5}{v_6} + \frac{80}{v_m} = x \end{cases}$$

v - скорость пешком

v_6 - скорость на велосипеде

v_m - скорость на автомобиле

x - ?

$$\frac{10}{v} + \frac{15}{v_6} + \frac{100}{v_m} = 5,5 \quad (1) \quad \Rightarrow \quad (2) - (1) \Rightarrow \frac{1}{v_6} = \frac{40}{v_m} - \frac{7}{10}$$

$$\frac{10}{v} + \frac{16}{v_6} + \frac{60}{v_m} = 4,8 \quad (2) \quad \text{подставим } \frac{1}{v_6} \text{ во 2 ур-е системы}$$

$$\frac{5}{v} + 8 \left(\frac{40}{v_m} - \frac{7}{10} \right) + \frac{30}{v_m} = 2,4; \quad \frac{5}{v} + \frac{320}{v_m} - \frac{56}{10} + \frac{30}{v_m} = \frac{24}{10};$$

$$\frac{1}{v} = \frac{16}{10} - \frac{70}{v_m}; \quad \text{подставим } \frac{1}{v} \text{ и } \frac{1}{v_6} \text{ в 3 ур-е системы}$$

$$4 \left(\frac{16}{10} - \frac{70}{v_m} \right) + 5 \left(\frac{40}{v_m} - \frac{7}{10} \right) + \frac{80}{v_m} = x; \quad \frac{64}{10} - \frac{280}{v_m} + \frac{200}{v_m} - \frac{35}{10} + \frac{80}{v_m} = x$$

$$x = \frac{64 - 35}{10} = 2,9 \text{ (часа)} = 2 \text{ ч } 54 \text{ мин} \quad \text{Ответ: } 2 \text{ ч } 54 \text{ мин.}$$

№3 $2019 \sqrt[3]{3,5x-2,5} + 2018 \cdot \log_2(3x-1) + m = 2020$

$2019 \sqrt[3]{3,5x-2,5} = f(x)$ - возрастает; $2018 \cdot \log_2(3x-1) = g(x)$ - возрастает; $(f(x) + g(x))$ - возрастает.

Найдём значение ~~выражения~~ при $x=1$

$2019 + 2018 + m = 2020 \Rightarrow m = -2017$

Найдём значение ~~выражения~~ при $x=3$

$2019 \cdot 2 + 2018 \cdot 3 = 2020 - m \Rightarrow m = -8072$

Из предыдущих соображений следует, что при $m \in [-8072; -2017]$ решения уравнений лежат на промежутке $[1; 3]$

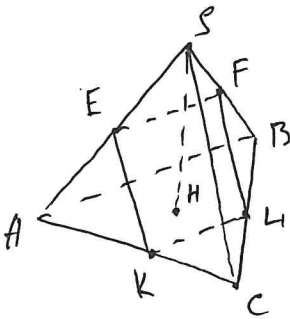
Ответ: $[-8072; -2017]$

Назовём пирамиду $SABC$: Дано:

$\triangle ABC$ - правильный; $AB = a$;
в центре квадрата $\triangle EFK$

$V_{\pi} = ?$

№5



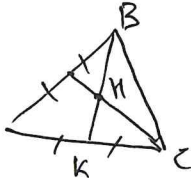
Решение:

$V_{\pi} = \frac{1}{3} S_{осн} \cdot h$; $S_{осн} = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4}$; $KC = b$; т.к. $\triangle KLC$ - равносторонний

1. $\triangle ASC$: $\triangle AEK \sim \triangle ASC$: $\frac{a}{a-b} = \frac{x}{b}$; $x = \frac{ab}{a-b} = SC$



2. $CH = BH = \frac{2}{3} BK = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$



3. $h = \left(\frac{ab}{a-b} \right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3} \right)^2 = \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2 \cdot 3}{9} = \frac{a^2 b^2}{(a-b)^2} - \frac{a^2}{3} = \frac{3a^2 b^2 - a^2(a-b)^2}{3(a-b)^2} = \left(\frac{a}{a-b} \right)^2 \cdot \frac{3b^2 - (a-b)^2}{3} = \frac{a}{a-b} \sqrt{\frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3}}$

$V_{\pi} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2 \sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a}{a-b} \sqrt{\frac{2b^2 + 2ab - a^2}{3}} = \frac{a^3 \sqrt{3}}{12(a-b)} \sqrt{2b^2 + 2ab - a^2}$

14

$$\begin{cases} a < 1 \\ b < 1 \\ c < 1 \\ a + b + c \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

Д-тв:

$$(1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{125}{216}$$

Рассмотрим частный случай: $a=b=c$; $a \leq \frac{1}{6}$; $b \leq \frac{1}{6}$; $c \leq \frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{l} (1-a) \leq \frac{5}{6} \\ (1-b) \leq \frac{5}{6} \\ (1-c) \leq \frac{5}{6} \end{array} \Bigg| \Rightarrow (1-a)(1-b)(1-c) \leq \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} \leq \frac{125}{216} \quad \text{т.т.д.}$$