Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004257

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет		математика
2.	Вариант		2
3.	Класс		11
4.		Фамилия	ЗАМЯТИН
		Имя	АНДРЕЙ
		Отчество	ИВАНОВИЧ
5.	Дата рождения		Число: 18; Месяц: 08; Год: 2003
6.	Страна		Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*		РС(Я)
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*		город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*		Якутск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь		ГБНОУ РС(Я) РЛИ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись АЗам

Место для скобы

Шифр 004257

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
18б	6.04.21	Гендрина И.Ю.	[подпись]

1. $\underbrace{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}}_{A},\ \underbrace{x-\frac{1}{x}}_{B},\ \underbrace{-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2020}}_{C}$

Заметим, что $A+B=x-\frac{1}{x^2+2020}$, что является целым, т.к. $A,B\in\mathbb{Z}$. Также заметим, что $\frac{1}{x^2+2020}<1$

$(x^2+2020>0)\Rightarrow 1<x^2+2020\geqslant 2020$, т.к $x^2\geqslant 0$.

Одно из чисел x, $\frac{1}{x}$ меньше единицы, ~~значит~~. и $x>0$ для начала доп., что $x<1$. Тогда

$x-\frac{1}{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$, ~~при этом~~ $\Rightarrow \{x\}-\left\{\frac{1}{x^2+2020}\right\}=0$, а

$\{x\}=x$ и $\left\{\frac{1}{x^2+2020}\right\}=\frac{1}{x^2+2020}$ Значит $x=\frac{1}{x^2+2020}$

$x^3+2020x-1=0.$

1 б

нет ответа на вопрос

1	2	3	4	5
1	6	2	2	7

Место для скобы

Шифр 004257

2. $t = \sin x$, $u = \cos(2x)$

$t - u + (t-u)(t^2+tu+u^2) + 2021(t-u)(t^4+t^3u+t^2u^2+tu^3+u^4)$

$\Updownarrow$

$(t-u)\big(\underbrace{1+t^2+tu+u^2+(t^4+t^3u+t^2u^2+tu^3+u^4)\cdot 2021}_{g(t,u)}\big) = 0.$

Заметим, что $\forall x,\ x\in[0;2\pi]$ выражение ~~$\sin x - \cos(2x)$~~ >0

~~При $x\in[0;\pi]$ $\sin x>0$, $\cos($~~

$(t-u)\big(\underbrace{1+(t+u)^2-tu+((t^2+tu)^2+(u^2+tu)^2-tu((t+u)^2-tu))\cdot 2021}_{f(t,u)}\big) = 0.$

$f(t,u) > 0$, если ~~один из $t, u \le 0$.~~

если $t, u \geq 0$, то ? $g(t,u) > 0$

если $t, u \leq 0$, то $t\cdot u \geq 0 \Rightarrow g(t,u) > 0.$

Равными нулю он быть не может, т.к. и $g(t,u)-1 \geq 0$ и $f(t,u)-1 \geq 0$.

$\Downarrow$

$t = u$ $\quad \sin x = \cos(2x) = -\sin^2 x + \cos^2 x. = 1 - 2\sin^2 x.$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \qquad l = \sin x$

$2l^2 + l - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$l_{1,2} = \frac{-1\pm 3}{4} \quad l_1 = -1 \quad l_2 = \frac{1}{2}$

$\left[\begin{array}{l}\sin x = -1\\ \sin x = \frac{1}{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k.\\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k\\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\end{array}\right.$

Недост. обосн.

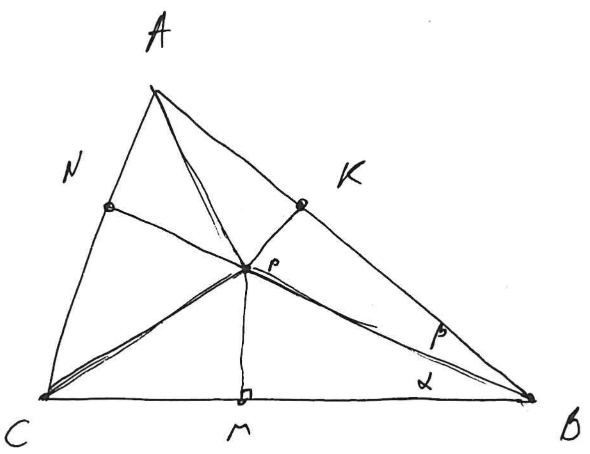
6 б

1	2	3	4	5
1	6			

Место для скобы

Шифр 004257

5.



$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}=\frac{BM}{PM}+\frac{CM}{PM}+\frac{AN}{PN}+\frac{CN}{PN}+\frac{AK}{PK}+\frac{BK}{PK},=$$

$$=ctg\,\alpha+ctg\,\widehat{MCP}+ctg\,\widehat{NCP}+ctg\,\widehat{NAP}+ctg\,\widehat{PAK}+ctg\,\beta=$$

$$=ctg\,\alpha+ctg\,\beta+ctg\,\widehat{MCP}+ctg\,\widehat{NCP}+ctg\,\widehat{NAP}+ctg\,\widehat{PAK}.$$

Докажем, что $ctg\,\alpha+ctg\,\beta \geq ctg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+ctg\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$.

$$ctg\,\alpha+ctg\,\beta=\frac{\cos\alpha\sin\beta+\cos\beta\sin\alpha}{\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}\geq\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)}$$

$\sin\alpha\sin\beta\leq\sin^2\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$. $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\varphi=\frac{\alpha-\beta}{2}$.

$\sin\alpha=\sin(\gamma+\varphi)$, $\sin\beta=\sin(\gamma-\varphi)$.

$$\sin(\gamma+\varphi)\sin(\gamma-\varphi)=(\sin\gamma\cos\varphi+\sin\varphi\cos\gamma)(\sin\gamma\cos\varphi-\cos\gamma\sin\varphi)=\sin^2\gamma\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\cos^2\gamma\leq\sin^2\gamma.$$

$$\sin^2\gamma(\underbrace{\cos^2\varphi-1}_{\leq 0})\leq\sin^2\varphi\cos^2\gamma\geq 0$$

7 б

$\Downarrow$

$ctg\,\alpha+ctg\,\beta$ принимает макс значение при $\alpha=\beta$.

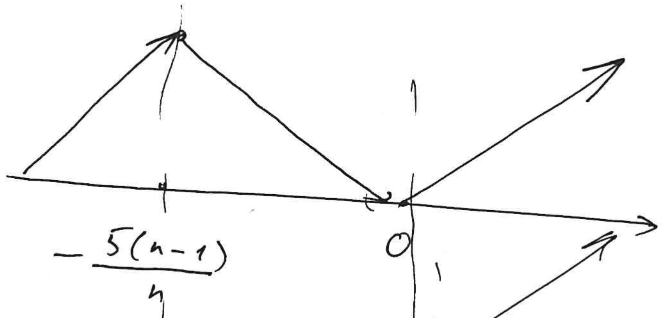
$\Downarrow$

P – точка пересечения биссектрис.

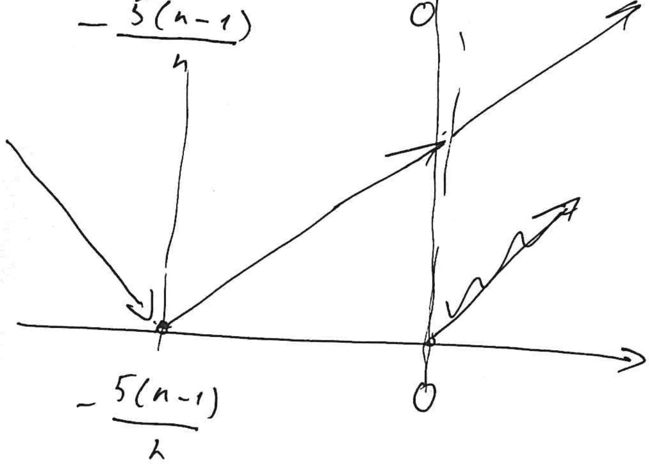
3. $P(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$, $n \in \mathbb{Z}$

$P'(t) = nt^{n-1} + 5(n-1)t^{n-2} = t^{n-2}(nt + 5(n-1)) = 0$, если

$t = 0$ и $t = -\dfrac{5(n-1)}{n}$.

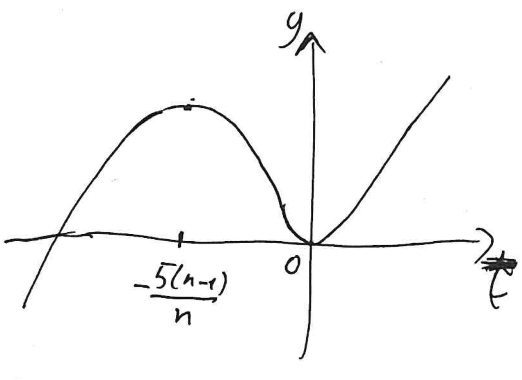


при $n \not\vdots\, 2$.



при $n \vdots\, 2$.

Рассмотрим многочлен $t^n + 5t^{n-1}$. при $n \not\vdots\, 2$



Тогда $P(t)$, $n \not\vdots\, 2$ имеет 1 действ. корень.

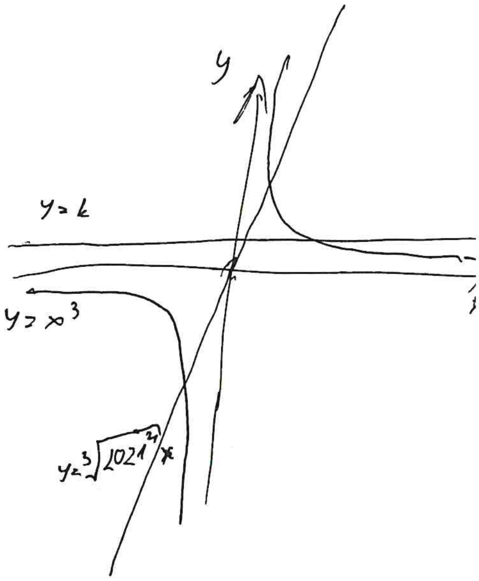
2б

Место для скобы

Шифр

4. $\dfrac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\cdot x}$ Заменим x^3 на a, $\sqrt[3]{2021^4}\cdot x$ на b и k на c.

Тогда $\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{a+c}\le\dfrac{3}{2}-\dfrac{c}{a+b}$.



$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{3}{2}$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+c}+\frac{1}{a+b}\right)-3\le\frac{3}{2}$$

$s=a+b+c$

$$s\left(\frac{s^2-(b+c)s+s^2-(a+c)s+s^2-(a+b)s+ab+bc+ac}{(a+b)(a+c)(b+c)}\right)-3\le\frac{3}{2}$$

$$s\left(\frac{3s^2-2s(\overbrace{a+b+c}^{s})+ab+bc+ac}{\underset{s-c}{(a+b)}\underset{s-b}{(a+c)}\underset{s-a}{(b+c)}}\right)-3\le\frac{3}{2}$$

$$s^2\left(\frac{s^3+s(ab+bc+ac)-s^3-s(ab+bc+ac)+abc+(a+b+c)s^2}{\cancel{(a+b)}\,(a+b)(a+c)(b+c)}\right)-2\le\frac{3}{2}$$

$$\frac{s^3-abc}{abc+(ab+bc+ac)s}\le\frac{7}{2}.$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\le\frac{a}{2\sqrt{bc}}+\frac{b}{2\sqrt{ac}}+\frac{c}{2\sqrt{ab}}=\frac{a^2\sqrt{bc}+b^2\sqrt{ac}+c^2\sqrt{ab}}{2abc}\le\frac{3}{2}$$

$\geq$

$$3\sqrt[3]{\frac{abc}{8abc}}=\frac{3}{2}.$$

~~2~~ 5

При $a=b=c$

$$\frac{a}{2a}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

если $x<\sqrt[3]{2021^2}$, то

$$\frac{x\sqrt[3]{2021^4}}{x^3+k}>1.$$

a, b

$x^3 \wedge \sqrt[3]{2021^4}x$

$x \wedge \sqrt[3]{2021^2}$