**МАТЕМАТИКА (9 класс)**

**Заключительный этап**

**Вариант 1**

1. Решите в натуральных числах уравнение

$$2y^{2}-xy-x^{2}+2y+7x-84=0.$$

**Ответ:**$ \left(1;6\right)$**,**$ \left(14;13\right)$**.**

**Решение:** Исходное уравнение представим в виде

$$2y^{2}-xy-x^{2}+2y+7x-12=72.$$

 Далее левую часть уравнения раскладываем на множители с помощью дискриминанта:

$$\left(x+2y-4\right)\left(y-x+3\right)=72.$$

Так как $72=1∙2∙2∙2∙3∙3,$ то следует сократить перебор.

Обозначим $x+2y-4=a$, $y-x+3=b$. Тогда $a∙b=72$ и $y =\frac{a+b+1}{3}$ и $y\in N$. Следовательно, $a$ $и b$ не могут быть отрицательными и каждое из них не должно делиться на 3, но одно из них должно делиться на 9. Таким образом, сократили перебор до вариантов:

$ 1) \left\{\begin{array}{c}a=9,\\b=8.\end{array}\right.$ 2) $\left\{\begin{array}{c}a=8,\\b=9.\end{array}\right.$ 3) $\left\{\begin{array}{c}a=18,\\b=4.\end{array}\right.$ 4) $\left\{\begin{array}{c}a=4,\\b=18.\end{array}\right.$ 5) $\left\{\begin{array}{c}a=36,\\b=2.\end{array}\right.$ 6)$ \left\{\begin{array}{c}a=2,\\b=36.\end{array}\right.$ 7)$ \left\{\begin{array}{c}a=72,\\b=1.\end{array}\right.$ 8)$ \left\{\begin{array}{c}a=1,\\b=72.\end{array}\right.$

Учитывая$ y =\frac{a+b+1}{3}$ , $y\in N$ получаем, что подходит всего два варианта:

$$1) \left\{\begin{array}{c}a=9,\\b=8.\end{array}\right. 2) \left\{\begin{array}{c}a=36,\\b=2.\end{array}\right.$$

Отсюда получаем два решения: $\left(1;6\right)$**,**$ \left(14;13\right)$**.**

1. Дана последовательность $ x\_{n}=1+2^{n}+3^{n}+4^{n}+5^{n}.$ Возможно ли найти в этой последовательности пять идущих подряд членов, каждый из которых будет делиться на 2025? Ответ объясните.

**Ответ: нет, не существует.**

**Решение:** Докажем, что при $n=4k, k\in N$ член последовательности с номером $n$ не

 делится на 5. Найдем

$ x\_{4k}=1+2^{4k}+3^{4k}+4^{4k}+5^{4k}=1+16^{k}+81^{k}+256^{k}+625^{k}.$

Числа $16^{k}, 81^{k}, 256^{k}$ представимы в виде $\left(5m+1\right)^{k}$,следовательно имеют остаток от деления на 5 равный 1. Число $625^{k}$ делится на 5 без остатка. Следовательно, член последовательности $ x\_{4k}$ дает при делении на 5 остаток 4. Таким образом, $ x\_{4k } $не делится 5, а следовательно, и на 2025. Значит, не существует пять идущих подряд членов, каждый из которых будет делиться на 2025.

1. Докажите, что для любых неотрицательных чисел $ a, b, c$ выполняется неравенство

$\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{2}\leq 3\left(a+b+c\right)$*.*

**Доказательство:** $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}\right)^{2}\leq 3\left(a+b+c\right)$*.*

$a+b+c+2\sqrt{ab}+2\sqrt{bc}+2\sqrt{ac}\leq 3\left(a+b+c\right)$*.*

$2a+2b+2c-2\sqrt{ab}-2\sqrt{bc}-2\sqrt{ac}\geq 0$*.*

$$a-2\sqrt{ab}+b+b-2\sqrt{bc}+c+c-2\sqrt{ac}+a\geq 0.$$

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{2}+\left(\sqrt{b}-\sqrt{c}\right)^{2}+\left(\sqrt{c}-\sqrt{a}\right)^{2}\geq 0.$$

1. Докажите, что для корней $x\_{1}, x\_{2 } $многочлена $ x^{2}+p\_{1}x+1$ и корней $x\_{3}, x\_{4 } $многочлена $ x^{2}+p\_{2}x+1$ справедливо равенство

$$\left(x\_{1}-x\_{3}\right)\left(x\_{2}-x\_{3}\right)\left(x\_{1}+x\_{4}\right)\left(x\_{2}+x\_{4}\right)=p\_{2}^{2}-p\_{1}^{2}.$$

**Доказательство:** По теореме Виета имеем равенства

$x\_{1}+x\_{2}=-p\_{1}, x\_{1}∙x\_{2}=1$, $x\_{3}+x\_{4}=-p\_{2}, x\_{3}∙x\_{4}=1.$

Тогда$ $

$$ \left(x\_{1}-x\_{3}\right)\left(x\_{2}-x\_{3}\right)\left(x\_{1}+x\_{4}\right)\left(x\_{2}+x\_{4}\right)=\left( x\_{1}x\_{2}-\left( x\_{1}+x\_{2}\right)x\_{3}+x\_{3}^{2}\right)\left( x\_{1}x\_{2}+\left( x\_{1}+x\_{2}\right)x\_{4}+x\_{4}^{2}\right)=$$

$$=\left(1+p\_{1}x\_{3}+x\_{3}^{2}\right)\left(1-p\_{1}x\_{4}+x\_{4}^{2}\right)=\left(x\_{3}^{2}+1+x\_{3}^{2}x\_{4}^{2}+x\_{4}^{2}\right)+p\_{1}\left( x\_{3}-x\_{4}- x\_{4}x\_{3}^{2}+x\_{3}x\_{4}^{2}\right)-$$

$$-p\_{1}^{2}x\_{3}x\_{4}=\left(x\_{3}+x\_{4}\right)^{2}+p\_{1}\left(x\_{3}-x\_{4}\right)\left(1-x\_{3}x\_{4}\right)-p\_{1}^{2}=p\_{2}^{2}-p\_{1}^{2}.$$

1. В прямоугольном треугольнике $ABC$ на гипотенузе $AB$ взята точка $M.$ Из точки $M $проведены две биссектрисы $MK$ и $MN$ углов $BMC$ и $AMC $соответственно, точки $K$ и $N$ лежат на катетах и $CM=KN$. Докажите, что точка $M$ ⎯ середина гипотенузы $AB.$

**Решение:**

****

Так как $MK$ и $MN$ являются биссектрисами смежных углов $BMC$ и $AMC$, то угол $NMK$ прямой. Тогда точки $C и M$ лежат на окружности с диаметром $KN$. Из равенства $CM=KN $следует, что и хорда $CM$ является диаметром этой окружности. Но тогда углы $MKC и MNC$ тоже прямые, следовательно, биссектрисы $MK$ и $MN $являются и высотами треугольников $BMC и AMC.$ Поэтому эти треугольники равнобедренные: $BM=MC$ и $AM=MC$. Следовательно, $BM=AM$***,*** а это и означает, что$ M$ ⎯ середина гипотенузы $AB.$

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35. |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |