**МАТЕМАТИКА (8 класс)**

**Заключительный этап**

**Вариант 1**

1. Решите в целых числах уравнение

$$2y^{2}-2xy+x+9y-2=0.$$

**Ответ:**$ \left(9;1\right)$**,** $\left(2;0\right)$**,**$ \left(8;2\right)$**,**$ \left(3;-1\right)$**.**

**Решение:** Выразим из этого уравнения $x$:

$$x=\frac{2y^{2}+9y-2}{2y-1}=y+5+\frac{3}{2y-1}.$$

Следовательно, число$2y-1$является делителем числа 3:

$$\left[\begin{array}{c}2y-1=1,\\2y-1=-1,\\2y-1=3,\\2y-1=-3.\end{array}\right.⇒ \left[\begin{array}{c}y=1,\\y=0,\\y=2,\\y=-1.\end{array}\right.⇒\left[\begin{array}{c}x=9,\\x=2,\\x=8,\\x=3.\end{array}\right.$$

1. Маша и Ваня нашли по дороге по пачке 11⎯рублевок и решили отправиться в магазин. В магазине Ваня купил 3 шоколадки, 4 газировки и 5 пачек печенья. Маша купила 9 шоколадок, 1 газировку и 4 пачки печенья. Шоколадка, газировка и пачка печенья стоят по целому числу рублей. Ваня смог расплатиться 11⎯рублевками без сдачи. Смогла ли Маша рассчитаться 11⎯рублевками без сдачи? Ответ объясните.

 **Ответ: да, смогла.**

 **Решение:** Введем следующие переменные:$ m⎯ стоимость 1 шоколадки,$

$ n⎯ стоимость 1 газировки, k⎯ стоимость 1 пачки печенья.$

 Так как Ваня смог расплатиться 11⎯рублевками без сдачи, то

$$3m+4n+5k=11p, p\in Z.$$

Для того, чтобы Маша смогла рассчитаться 11⎯рублевками без сдачи, сумма

$$9m+n+4k$$

должна быть кратна 11.

Выразим из первого уравнения $3m$ и подставим во второе выражение:

$$9m+n+4k=3\left(11p-4n-5k\right)+n+4k=33p-11n-11k=11\left(3p-n-k\right).$$

Значит, сумма, потраченная Машей кратна 11.

Следовательно, Маша смогла рассчитаться 11⎯рублевками без сдачи.

1. Докажите, что для любых положительных чисел $ a, b, c$ выполняется неравенство

$$ \frac{a∙c^{2}+b}{c}\geq 2\sqrt{a∙b} .$$

**Доказательство:** Используя неравенство о средних, получим:

$$\frac{a∙c^{2}+b}{c}=ac+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{aс∙\frac{b}{с}}\geq 2\sqrt{a∙b} .$$

1. Докажите, что при любых $p и q $ хотя бы один из двух трехчленов

$ x^{2}-2px+pq$ , $ x^{2}-2qx+pq$

имеет корень.

**Доказательство:** Воспользуемся методом от противного.

Пусть оба трехчлена не имеет корней. Тогда их дискриминанты отрицательны:

$$4p^{2}-4pq<0, 4q^{2}-4pq<0.$$

Складывая эти неравенства, получаем, что $4\left(p-q\right)^{2}<0.$ Получили противоречие.

1. В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием$ AB$ проведены биссектрисы $CL$ и $AK.$ Найдите $ ∠ACB $треугольника $ABC$, если известно, что $AK=2CL.$

**Ответ:**$ 108°$

**Решение:**

****

1. Достроим треугольник до ромба $ABCD$, причем $H\in CD$, так как$ CL⎯$ биссектриса и медиана (треугольник $ABC ⎯ равнобедренный$).

2. Трапеция $ACKD $является равнобокой, так как диагонали ее равны из-за того, что$ AK=2CL.$

3. Треугольники $ACK$ и *DKC* равны по трем сторонам. Следовательно, равны и соответствующие углы.

4. Пусть угол $CAK$ равен $α$, тогда угол *CDK* тоже равен $α$.

5. Так как $AK$ $⎯$ биссектриса, то $∠CAB=2α.$ Тогда угол $∠CAD=4α и ∠ACB=∠CKD=180°-4α$, $∠DCK=\frac{180°-4α}{2}=90°-2α.$

6. По теореме о сумме углов треугольника относительно треугольника *DKC* имеем

$$α+180°-4α+90°-2α=180°.$$

$$α=18°.$$

Следовательно, $∠ACB=∠CKD=180°-4α=180°-4∙18°=108°.$

**Критерии оценивания приведены в таблице:**

|  |  |
| --- | --- |
| Баллы | Критерии оценивания одной задачи. Максимальный балл по билету – 35. |
| **7** | Полное обоснованное решение. |
| **6** | Обоснованное решение с несущественными недочетами. |
| **5-6** | Решение содержит незначительные ошибки, пробелы в обоснованиях, но в целом верно и может стать полностью правильным после небольших исправлений или дополнений. |
| **4** | Задача в большей степени решена, чем не решена, например, верно рассмотрен один из двух (более сложный) существенных случаев.  |
| **2-3** | Задача не решена, но приведены формулы, чертежи, соображения или доказаны некоторые вспомогательные утверждения, имеющие отношение к решению задачи. |
| **1** | Задача не решена, но предпринята попытка решения, рассмотрены, например, отдельные (частные) случаи при отсутствии решения или при ошибочном решении.  |
| **0** | Решение отсутствует, либо решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше. |