Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

003510

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	алгебра
2.	Вариант	1
3.	Класс	11А
4.	Фамилия	ЯКОВЛЕВ
	Имя	ВАЛЕРИЙ
	Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
5.	Дата рождения	07 (Число) 04 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Республика Бурятия
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	северобайкальск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ лицей №6

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Я

место для скобы

Шифр 003510

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
19б	3.04.21	Гендрико И.Ю.	[illegible]

Задача 1: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Я заметил, что сумма всех трех чисел равна II числу.

I число $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$

II число $x-\frac{1}{x}$

III число $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

7б

$I+II+III=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}+x-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=$

$=x-\frac{1}{x}=$ II число

Получили $I+II+III=II$, значит $I+III=0$, это бывает если I и III числа противоположные

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ противоположные

Противоположные числа равноудалены от нуля, значит $x-\frac{1}{x}=0$

это будет, если $x=1 \Rightarrow 1-1=0$, но $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=$

$=1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$ - не целые

и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=-\frac{2021}{2022}$ - не целые

Ответ: не существует такого x

1	2	3	4	5
7	7	2	1	2

Место для скобы

Шифр 003510

Задача 2:

$$\sin x + \sin^3 x + 2020\sin^5 x = \cos 2x + \cos^3 2x + 2020\cos^5 2x$$

Равенство выполняется, если

$\sin x = \cos 2x$

~~$(\sin x = \cos 2x = 0)$~~

$\sin x - \cos 2x = 0$

$\sin x - 1 + 2\sin^2 x = 0$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

Пусть $\sin x = y$

$2y^2 + y - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9$

$y = \dfrac{-1 \pm 3}{4} = \left[\begin{array}{l} y_1 = -1 \\ y_2 = \dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

$\sin x = -1$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\sin x = \dfrac{1}{2}$

$x_1 = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$

$x_2 = \dfrac{5}{6}\pi + 2\pi k, \ k \in Z$

75

Проверка

1) $x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$

$\sin\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + \sin^3\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) + 2020\sin^5\left(-\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k\right) =$

$= -1 - 1 - 2020 = -2022$

$\cos 2x + \cos^3 2x + 2020\cos^5 2x = \cos(-\pi + 2\pi k) +$

$+ \cos^3(-\pi + 2\pi k) + 2020\cos^5(-\pi + 2\pi k) = -1 - 1 - 2020 =$

$= -2022$

$x = -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, \ k \in Z$ является корнем

2) $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + \sin^3\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) + 2020\sin^5\left(\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k\right) =$

$\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{2020}{32} = \dfrac{2040}{32} = 63{,}75$

$\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + \cos^3\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) + 2020\cos^5\left(\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k\right) =$

$= \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{8} + \dfrac{2020}{32} = \dfrac{2040}{32} = 63{,}75$

$x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k, \ k \in Z$ является корнем скобы

Шифр 003510

3) ~~$x = \pi$~~ $x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k,\ k \in Z$

$\sin x + \sin^3 x + \sin^5 x = \sin\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) + \sin^3\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) +$
$+ \sin^5\left(\frac{5}{6}\pi + 2\pi k\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2020}{32} = \frac{2040}{32} = 63,75$

$\cos\left(\frac{5}{3}\pi + 2\pi k\right) + \cos^3\left(\frac{5}{3}\pi + 2\pi k\right) + 2020\cos^5\left(\frac{5}{3}\pi + 2\pi k\right) =$
$= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{2020}{32} = \frac{2040}{32} = 63,75$

$x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$ является корнем

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \frac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in Z;\ \frac{5}{6}\pi + 2\pi k,$
$k \in Z$

Задание 3:

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3,\ n > 1$

Если функция имеет целые корни, то они являются делителями ~~(свобод)~~ свободного члена 3 - это $\pm 1; \pm 3$

$f(1) = 1 + 5 + 3 \neq 0$
$f(-1) = -1 + 5 + 3 \neq 0$
$f(3) = 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 \neq 0$
$f(-3) = -3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 \neq 0$

В условии речь идет о целых коэффициентах!

Представим $f(x)$ в виде $(x - \alpha) \cdot Q_{n-1} x$

$x^n + 5x^{n-1} + 3 = (x^{n-1} - \alpha)(x - \beta)$
$x^n + 5x^{n-1} + 3 = x^n - \beta \cdot x^{n-1} - \alpha \cdot x + \alpha \cdot \beta$
Старший коэффициент $= 1$
$\beta = -5;\ -\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$
$\alpha\beta = 3;$ но $\alpha = 0$ и $\alpha \cdot \beta = 0$

т. е $f(x)$ нельзя представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами

Ответ: нельзя

2 б

Место для скобы

Шифр

Задание 4:

$$\frac{x^3}{a+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}+\frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{a+x^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{a}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})}$$

$$\sqrt[3]{2020^4}=2020\sqrt[3]{2020}=2020\sqrt[3]{2020}$$

$12<\sqrt[3]{2020}<13$ $\qquad$ $12\cdot12\cdot12=1728$

$\sqrt[3]{2020}\approx12,6$ $\qquad$ $13\cdot13\cdot13=2197$

$2020\cdot12,6\approx25500=$

$$=\frac{x^3}{a+x\cdot25500}+\frac{25500x}{a+x^3}\leqslant\frac{3}{2}-\frac{a}{x^3+25500x}$$

т.к $a>0$, $x>0$, то

$$\frac{x^3}{a+x\cdot25500}>0;\ \frac{25500x}{a+x^3}>0$$

значит $\dfrac{x^3}{a+x\cdot25500}+\dfrac{25500}{a+x^3}>0$

Получим $\dfrac{3}{2}-\dfrac{a}{x^3+25500x}\geqslant0$

найдем a

$$-\frac{a}{x(x^2+25500)}\geqslant-\frac{3}{2}$$

$0<\dfrac{a}{x(x^2+25500)}\leqslant\dfrac{3}{2}\ \Big|\cdot2x(x^2+25500)$, т.к

$x(x^2+25500)>0$

$0<2a\leqslant3x(x^2+25500)$

$0<a\leqslant\dfrac{3}{2}x(x^2+25500)$, ~~где~~ $x>0$

Ответ: $0<a\leqslant\dfrac{3}{2}x(x^2+25500)$

Ответ некорр

1 б

скобы

Шифр

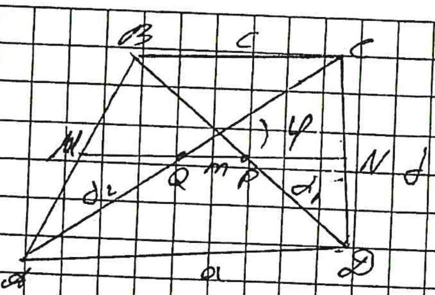
Задание 5:

Дано:

$c + a + d_1 = 16$

$S = 32$

Какие знач. может принимать d_2



Решение:

$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi = 32$

$m = QP = MP - MQ$

$MP = \frac{a}{2}$ т.к. MP — средняя линия $\triangle ABD$, а MQ в $\triangle ABC$

$MQ = \frac{c}{2}$; $m = \frac{a}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-c}{2}$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + 4m^2$

$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 + a^2 - 2ac + c^2$

$b^2 + d^2 = d_1^2 + d_2^2 - 2ac$

$S = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = 32$

$d_1 \cdot d_2 \cdot \sin\varphi = 64$

$d_2 = \frac{64}{d_1 \cdot \sin\varphi}$

$d_1 + d_2 > a + c$ — по свойству выпуклого четырехугольника

$2d_1 + d_2 > a + c + d_1$

$2d_1 + d_2 > 16$

$d_2 > 16 - 2d_1$

если $d_1 = 5$, то $d_2 > 6$, например $d_2 = 7$; $d_2 = 6,2$

$c + a + d_1 = 16$ — учитывая $d_2 < c + a$

Значение не найдено

2 б