Место для скобы

003490

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ВОРОБЬЕВ
	Имя	ИВАН
	Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	14 (Число) 04 (Месяц) 2004 (Год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Р. Бурятия
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	село
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Хоринск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Хоринская Среднея Общеобразовательная школа №2

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Вороб

Место для скобы

Шифр 003490

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
23б	3.04.21	Гендрина И.Ю.	

1	2	3	4	5
7	7	7	0	2

Задача №1.

$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

если числа являются целыми, то и их сумма является целым числом, поэтому сложим их все:

$$\cancel{\frac{1}{x}}-\cancel{\frac{1}{x^2+2021}}+x-\cancel{\frac{1}{x}}+\cancel{\frac{1}{x^2+2021}}-\frac{1}{x}=$$

7б

$=x-\frac{1}{x}$ заметим, что сумма совпадает со вторым числом, ~~следовательно если оно целое, то и другие тоже целые~~.

Пусть $x=\frac{a}{b}$, где a и ~~б~~ b — целые ~~и не имеющие общих делителей числа~~, тогда второе число равно $\frac{a}{b}-\frac{1}{\frac{a}{b}}=\frac{a}{b}-\frac{b}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}=\cancel{\frac{(a-b)(a+b)}{ab}}$

из выражения $\frac{a^2-b^2}{ab}$ вынесем число c — общие делитем a и b

тогда $\frac{c^2\cdot(a'^2-b'^2)}{c^2\cdot a'b'}=\frac{a'^2-b'^2}{a'b'}$ чтобы это число

было целым, должно и a' и b' делиться как на b', так и на a', но общих делителей у a' и b' нет, поэтому единственное решение это $a'=b'$ и, тогда

$\frac{a'^2-a'^2}{a'^2}=0$, т.е единственное целое значение $x-\frac{1}{x}=0$

Место для скобы

Шифр 003490

3. №1

$$x - \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{x^2 - 1}{x} = 0$$

$$x = \pm 1, \ x \neq 0$$

подставим в первое число:

$x = 1$

$\frac{1}{1} - \frac{1}{1+2021} = 1 - \frac{1}{2022}$ — не является целым.

$x = -1$

$\frac{1}{-1} - \frac{1}{1+2021} = -1 - \frac{1}{2022}$ — не является целым.

третье число похоже на первое, но отличается от него лишь знаком, поэтому оно тоже не будет целым.

Ответ: нет.

Задача №2

$$\sin(x) + \sin^3(x) + 2020\sin^5(x) = \cos(2x) + \cos^3(2x) + 2020\cos^5(2x)$$

$$2020\left(\cos^5(2x) - \sin^5(x)\right) + \left(\cos^3(2x) - \sin^3(x)\right) + \left(\cos(2x) - \sin(x)\right) = 0$$

7б

Пусть $\cos(2x) = a$, $\sin(x) = b$, $-1 \le a \le 1$, $-1 \le b \le 1$.

$$2020(a^5 - b^5) + (a^3 - b^3) + (a - b) = 0$$

$$2020(a^5 - a^4b + a^4b - a^3b^2 + a^3b^2 - a^2b^3 + a^2b^3 - ab^4 + ab^4 - b^5) + (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0$$

$$2020(a-b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4) + (a-b)(a^2 + ab + b^2) + (a-b) = 0$$

$$(a-b)(2020a^4 + 2020a^3b + 2020a^2b^2 + 2020ab^3 + 2020b^4 + a^2 + ab + b^2 + 1) = 0$$

Место для скобы

Шифр 003490

3. №2

$$\left[\begin{array}{l} a-b=0 \\ 2020a^4+2020a^2b^2+2020b^4+1+2020a^3b+2020ab^3+ab+a^2+b^2=0 \end{array}\right.$$

рассмотрим второе выражение:

$$2020(a^4+a^2b^2+b^4)+a^2+b^2+1=-2020(a^3b+ab^3)-ab$$

левая часть выражения ≥ 0, тогда

правая ≥ 0, следовательно a и b не могут быть одного знака

$$2020(a^4+a^2b^2+b^4)\leq 2020\cdot 3$$

$$2020(a^3b+ab^3)\leq 2020\cdot 2$$

$$a^2+b^2\leq 2$$

$ab \leq 1$ ~~тогда~~

~~левая часть~~ $\leq$

$$a^4+a^2b^2+b^4>(a^3b+ab^3)$$

$$a^4+b^4\geq 0\geq (a^2+b^2)ab-a^2b^2=(ab)\cdot(a^2+b^2-ab)$$

$ab<0$ т.к a и b разных знаков

$$a^2+b^2-ab>0$$

$$a^2-2ab+b^2-ab>0$$

$(a-b)^2>0>ab$, поэтому

$$2020(a^4+a^2b^2+b^4)+a^2+b^2\geq -2020(a^3b+ab^3)-ab,$$

следовательно $2020(a^4+a^2b^2+b^4)+a^2+b^2+1>-2020(a^3b+ab^3-ab,$

поэтому это выражение не имеет решений

Место для скобы

Шифр

З №2.

$a - b = 0$

$\cos(2x) - \sin(x) = 0$ по формуле косинуса двойного угла.

$-2\sin^2(x) + 1 - \sin(x) = 0$

$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$\sin(x) = \frac{-1 \pm 3}{4}$ $\left[\begin{array}{l}\sin(x) = -1 \\ \sin(x) = \frac{1}{2}\end{array}\right.$ $\Rightarrow$ $\left[\begin{array}{l}x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

Ответ: $\left[\begin{array}{l}x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$

~~З~~ №3 Задача №3

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ при $n > 1$ и n — целом

является многочленом n-ой степени, поэтому его можно разложить, как:

$(x - x_0)(x - x_1)\cdot(x - x_2)\cdots(x - x_{n-1})$, где $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ — решения этого многочлена,

но тогда свободный член, т.е 3, — это произведение всех решений,

а 3 ~~[illegible]~~ может иметь не более двух делителей (1 и 3),

следовательно такое возможно при $n = 2$:

$x^2 + 5x + 3 = f(x)$

$D = 25 - 12 = 13$

$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2} \notin \mathbb{Z}$

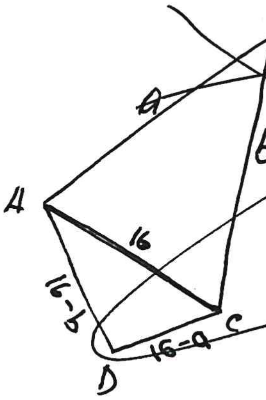
Ответ: такого быть не может.

7б

Место для скобы

Шифр

Задача №5



$AC = 16$ – диагональ

$ABCD$ – четырехугольник

Пусть $AB = a$, $BC = b$, следовательно

$DC = 16 - a$, $AD = 16 - b$

по неравенству треугольника:

$\triangle ABC$ $\quad AC < AB + BC = a + b$

$\triangle ADC$ $\quad AC < AD + DC = 16 - a + 16 - b \Rightarrow 16 < 32 - a - b$

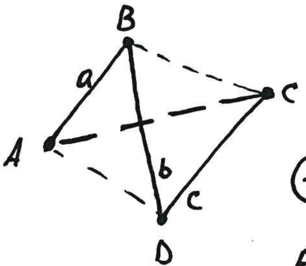
$\Downarrow$

$0 < 16 - a - b = 16 - (a + b)$,

но т.к $a + b > AC = 16$, то неравенство $0 < 16 - (a+b)$ не имеет решений,

~~следовательно~~ такой фигуры не существует.

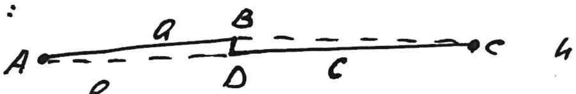
Задача №5



$ABCD$ – выпуклый 4-х/уг

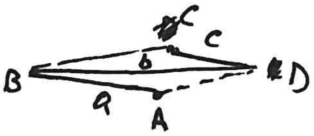
$a + b + c = 16$

① ~~Пусть ABCD = ромб~~, диагональ $BD \to 0$, тогда рисунок такой:



и длина второй диагонали не может быть больше, чем $a + c < 16$ (наибольшая длина второй диагонали)

② Пусть $0 < BD \le 8$, тогда рисунок такой: (при $BD \geq 8$ фигура не существует)



Значение не получено.

2 б