ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004498

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ВЕДМЕДЕВА
	Имя	МАРГАРИТА
	Отчество	ВЛАДИМИРОВНА
5.	Дата рождения	06 (число) 05 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ «школа 53»

1	2	3	4	5	Σ
3	7	~~8~~ 1	6	7	~~26~~ 24б

004498

(1) $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$; $x-\frac{1}{x}$; $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$

Замена: $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=K$

$x-\frac{1}{x}=L$

$\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=N$

Если все целые, то сумма тоже целая.
~~Поскольку~~ $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ – взаимно обратные (по знаку);

$K+L=x-\frac{1}{x^2+2021}$ должно $\in \mathbb{Z}$, но тогда
$x-\frac{1}{x^3+2021}$ и $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$.

Однако $\frac{1}{x^2+2021}<1$ (дробь) $\Rightarrow$
число $x-\frac{1}{x^3+2021}=M\in\mathbb{Z}$ и у x такая же дробная часть, что и у $\frac{1}{x}$. Это достигается только при $x=\pm1$. Но, подставив $x=\pm1$ в исходные K и L, получим нецелое число.

Ответ: нет

004498

(2) $\sin 2x + \sin^5 2x + 2020\sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020\cos^9 4x$

Заменим $\sin 2x$ на a, $\cos 4x$ на b.

Тогда

$$a + a^5 + 2020a^9 = b + \cancel{\cos} b^5 + 2020b^9;$$

$y = a + a^5 + 2020a^9$ $\quad$ $y = b + b^5 + 2020b^9$

$y' = 1 + 5a^4 + 2020 \cdot 9a^8$ $\quad$ $y' = 1 + 5b^4 + 2020 \cdot 9b^8$

$\left.\begin{matrix} a^4 \text{ и } a^8 \\ b^4 \text{ и } b^8 \end{matrix}\right\}$ стоят в четной степени $\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix} a^4 \text{ и } a^8 \\ b^4 \text{ и } b^8 \end{matrix}\right\} \geq 0$ – всегда $\Rightarrow$

$y = a + a^5 + 2020a^9$ и $y = b + b^5 + 2020b^9$ монотонно возрастают $\Rightarrow$

$a + a^5 + 2020a^9 = b + b^5 + 2020b^9$ достигается только при $a = b$.

Тогда $\sin 2x = \cos 4x$

004498

$\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 2x + \sin 2x - 1 = 0$

$\sin 2x = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$t_{12} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8=9}}{4} = \dfrac{\pm 3 - 1}{4}$

$t_1 = \frac{1}{2} \qquad t_2 = -1$

$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$

$\sin 2x = \frac{1}{2} \qquad \sin 2x = -1$

$\left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k \end{array}\right. \qquad 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi l$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi l$

$l \in \mathbb{Z}$

$\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k \end{array}\right.$

$k \in \mathbb{Z}$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi k, \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi l, \end{array}\right. \quad k, l \in \mathbb{Z}$

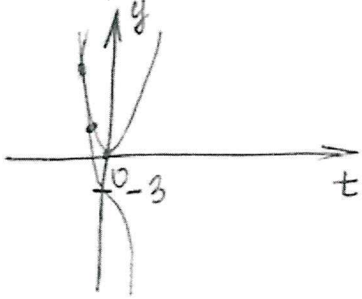
③ $\begin{cases} p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3 \\ n > 1 \\ n \in \mathbb{Z} \end{cases}$

$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 \ldots + t_n = -5 \\ t_1 t_2 t_3 \cdot \ldots \cdot t_n = 3 \end{cases}$ – по т. Виета

$t^n + 5t^{n-1} + 3 = 0$

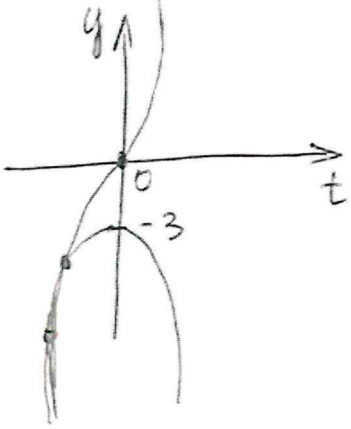
$t^n = -5t^{n-1} - 3$

при n – ~~не~~ четн. числах: $y = t^n$, $y = -5t^{n-1} - 3$



Как построен графики?

при n – нечет. числах: $y = t^n$, $y = -5t - 3$



Число отрицательных корней четное (по т. Виета):

$t_1 t_2 t_3 \ldots t_n = 3$

Получаем 2 отриц. корня

⇓

$\begin{cases} t_1 + t_2 = -5 \\ t_1 t_2 = 3 \end{cases}$

Отсюда $t^2 + 5t + 3 = 0$ с идентичными решениями.

$t^2+5t+3=0$

$$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{25-12=13}}{2} \Rightarrow t_1=\frac{-5-\sqrt{13}}{2}$$

$$t_2=\frac{\sqrt{13}-5}{2}$$

$\sqrt{13}=(\sqrt{13})^2=13$ лежит между $3\ (3^2=9)$ и $4\ (4^2=16)$

$\Downarrow$

$$\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}<0$$

$\Downarrow$

$p(t)$ можно представить в виде произведения многочленов полож. степени с цел. коэффиц:

① $d(t)=(t^{n-2}-3t^{n-4}+\ldots+1)$ - множ. 1

② $g(t)=t^2+5t+3$ - множ. 2

$$\begin{array}{l|l} t^n+5t^{n-1}+3 & t^2+5t+3 \\ t^n+5t^{n-1}+3t^{n-1} & \overline{t^{n-2}-3t^{n-4}} \\ \hline \quad -3t^{n-2}+3 & \\ \quad -3t^{n-2}-15t^{n-3} & \\ \hline \quad \ldots & \end{array}$$

Ответ: можно.

Ответ неверный

Недост. обосн.

(4)
$$\begin{cases} \dfrac{x^3}{m+x\sqrt[3]{2020^4}} \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{x(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \dfrac{x\sqrt[3]{2020^4}}{m+x^3} \\ x>0 \\ m>0 \end{cases}$$

Замена: $x\sqrt[3]{2020^4} = a$, $a>0$ $\Rightarrow \dfrac{x^3}{m+a} \leq \dfrac{3}{2} - \dfrac{m}{x^3+a} - \dfrac{a}{m+x^3}$

$$\frac{x^3}{m+a} + \frac{m}{x^3+a} + \frac{a}{m+x^3} \leq \frac{3}{2}$$

Т.к $x>0, m>0 \Rightarrow$ сумма положительных чисел ~~чисел~~ положительна:

$$\frac{1}{\dfrac{x^3}{m+a} + \dfrac{m}{x^3+a} + \dfrac{a}{m+x^3}} \geq \frac{2}{3}$$

$$\frac{3}{\dfrac{x^3}{m+a} + \dfrac{m}{x^3+a} + \dfrac{a}{m+x^3}} \geq 2 \Rightarrow$$

$$\frac{\dfrac{m+a}{x^3} + \dfrac{x^3+a}{m} + \dfrac{x^3+m}{a}}{3} \geq \frac{3}{\dfrac{x^3}{m+a} + \dfrac{m}{x^3+a} + \dfrac{a}{m+x^3}} \geq 2 -$$

из нерав-а о средних $\left(\dfrac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leq \dfrac{a+b+c}{3}\right.$; равенство при $\left. a=b=c \right)$?

$$\frac{1}{3}\left(\frac{m+a}{x^3} + \frac{x^3+a}{m} + \frac{m+x^3}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{x^3} + \frac{a}{x^3} + \frac{x^3}{m} + \frac{a}{m} + \frac{m}{a} + \frac{x^3}{a}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{m}{x^3} + \frac{x^3}{m} + \frac{a}{x^3} + \frac{x^3}{a} + \frac{a}{m} + \frac{m}{a}\right).$$

$$\frac{1}{3}\left(\left(\frac{m}{x^3} + \frac{x^3}{m}\right) + \left(\frac{a}{x^3} + \frac{x^3}{a}\right) + \left(\frac{a}{m} + \frac{m}{a}\right)\right) \geq 2 \Rightarrow$$

Оценка достигается при аналог. условиях, что и в исходном

$$\begin{cases} x^3 = m \\ m = a \\ x^3 = a \end{cases} \Rightarrow \quad x = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$$

$$x > 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow$$

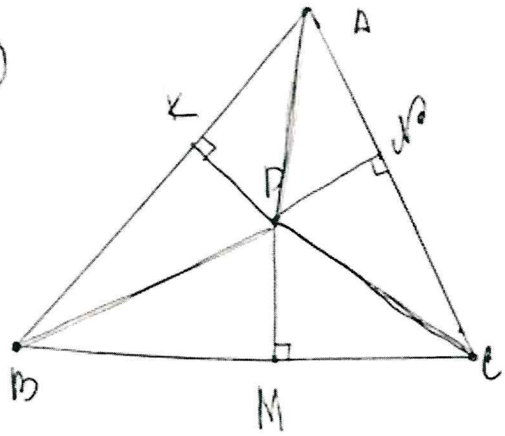
$$x = \sqrt[3]{2020^2} > 0$$

$m = 2020^2$

$m > 0$

Ответ: 2020^2.

⑤



$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$$

1) Проведем AP, BP, PC.
Тогда $S_{ABC} = S_{APB} + S_{APC} + S_{PBC}$

$S_{APB}: \frac{AB \cdot PK}{2}$
$S_{APC}: \frac{AC \cdot PN}{2}$ — по формуле площади треугольника
$S_{PBC}: \frac{BC \cdot PM}{2}$

$\Downarrow$

$$S_{ABC} = \frac{AB \cdot PK}{2} + \frac{AC \cdot PN}{2} + \frac{BC \cdot PM}{2}$$

$$2S_{ABC} = AB \cdot PK + AC \cdot PN + BC \cdot PM$$

2) Умножив обе части равенства на $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$, получим:

$$AB^2 + AC^2 + BC^2 + \frac{AB \cdot BC \cdot MP}{PK} + \frac{AB \cdot AC \cdot NP}{PK} + \frac{AB \cdot BC \cdot PK}{MP} + \frac{AC \cdot CB \cdot NP}{MP} + \frac{AB \cdot AC \cdot PK}{NP} + \frac{AC \cdot CB \cdot MP}{NP}$$

$$= AB^2 + CB^2 + AC^2 + AB \cdot CB\left(\frac{MP}{PK} + \frac{PK}{MP}\right) + AB \cdot AC\left(\frac{NP}{PK} + \frac{PK}{NP}\right) + BC \cdot AC\left(\frac{NP}{MP} + \frac{MP}{NP}\right)$$

3) Заметим, что все числа в скобках взаимно-обратные:

$$\frac{MP}{PK} + \frac{PK}{MP} \geq 2;\ \frac{NP}{PK} + \frac{PK}{NP} \geq 2;\ \frac{NP}{MP} + \frac{MP}{NP} \geq 2$$ — нерав. о средних.

4) Тогда $AB^2+BC^2+AC^2+AB\cdot BC\left(\frac{MP}{PK}+\frac{PK}{MP}\right)+AB\cdot AC\left(\frac{NP}{PK}+\frac{PK}{NP}\right)+$
$+BC\cdot AC\left(\frac{NP}{MP}+\frac{MP}{NP}\right)\geq AB^2+BC^2+AC^2+2AB\cdot BC+2AB\cdot AC+$
$+2BC\cdot AC$.

При $PK=MP=NP$ – равенство обеих частей, при которых достигается мин. значение $\Rightarrow$
P является центром вписанной окруж.

Ответ: центр вписанной окружности.