КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07037

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

г	МАТЕМАТИКА
	1
	10
я	ВАСИЛЬЕВА
	АЛЕКСАНДРА
о	АЛЕКСЕЕВНА
кдения	30 (Число) 10 (Месяц) 2006 (Год)
	Россия
пр: Томская обл., градская область)	Томская обл.
ципального образования деревня, село, город)	город
ный пункт (пр: Томск, о, Псков)	Томск
наименование тельного учреждения, м Вы обучаетесь в ремя	ОГБОУ ТФТЛ

ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail льтатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________________

Шифр 07037

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
15	28.03.23	Хмылёва Т.Е	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
7	1	0	7	–	

№1.

$y^2(y-x+2)-y(x+4)+5x+7=0$

$y(y(y-x+2)-(x+4))+5x+7=0$

$y(y^2-xy+2y-x-4)+5x+7=0$

$y(y^2+2y+1-x(y+1)-5)+5x+7=0$

$y((y+1)^2-x(y+1)-5)+5x+7=0$

$y(y+1)(y+1-x)-5y+5x+7=0$

$y(y+1)(y+1-x)-5(y-x)-5+12=0$

$y(y+1)(y+1-x)-5(y+1-x)+12=0$

$(y+1-x)(y(y+1)-5)=-12$

$(y+1-x)(y^2+y-5)=-12$

т. к. x и y – целые, то $(y+1-x)$ – целое $\Rightarrow$ $(y+1-x)$ и (y^2+y-5) являются целыми делителями числа -12

делители -12:

1	и	−12	12	и	−1	−6	и	2
−1	и	12	−12	и	1			
3	и	−4	4	и	−3			
−3	и	4	−4	и	3			
2	и	−6	6	и	−2			
−2	и	6						

$\Rightarrow$ проверим каждую из этих пар, решив системы

1. $\begin{cases} y+1-x=1 \\ y^2+y-5=-12 \end{cases}$

$y^2+y+7=0$

$D=1-28<0$

нет корней

$\Rightarrow$ пара 1 и −12 не подходит

2. $\begin{cases} y+1-x=-1 \\ y^2+y-5=12 \end{cases}$

$y^2+y-17=0$

$D=1+68=69$

$\sqrt{69}\notin\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$

пара −1 и 12 не подходит

3. $\begin{cases} y+1-x=3 \\ y^2+y-5=-4 \end{cases}$

$y^2+y-5=-4$

$y^2+y-1=0$

$D=1+4=5$

$\sqrt{5}\notin\mathbb{Z}$ $\Rightarrow$ пара 3 и −4 не подходит

• из вышеприведенных систем можно заметить, что необходимо сначала рассматривать y^2+y-5, поэтому в дальнейшем решении ~~при рассмотрении~~ рассматривается только y^2+y-5 и в случае равенства уравнение $y+1-x$.

4. $y^2+y-5=4$

$y^2+y-9=0$

$D=1+36=37\notin\mathbb{Z}$

$\sqrt{37}\notin\mathbb{Z}$

5. $y^2+y-5=-6$

$y^2+y+1=0$

$D=1-4<0$

6. $y^2+y-5=6$

$y^2+y-11=0$

$D=1+44=45\notin\mathbb{Z}$

$\sqrt{45}\in\mathbb{Z}$

Место для скобы

Шифр 07037

(7) $y^2+y-5=-1$
$y^2+y-4=0$
$D=1+16=17 \notin \mathbb{Z}$
$\sqrt{17} \notin \mathbb{Z}$

(8) $y^2+y-5=1$
$y^2+y-6=0$
$D=1+24=25$
$\left[\begin{array}{l} y_1=2 \\ y_2=-3 \end{array}\right.$

2) $y+1-x=-12$
$x=y+1+12$
$\left[\begin{array}{l} x_1=2+1+12=15 \\ x_2=-3+1+12=10 \end{array}\right.$

(9) $y^2+y-5=-3$
$y^2+y-2=0$
$D=1+8=9$
$\left[\begin{array}{l} y_3=1 \\ y_4=-2 \end{array}\right.$

2) $y+1-x=4$
$x=y+1-4$
$\left[\begin{array}{l} x_3=1+1-4=-2 \\ x_4=-2+1-4=-5 \end{array}\right.$

(10) $y^2+y-5=3$
$y^2+y-8=0$
$D=1+32=33 \notin \mathbb{Z}$
$\sqrt{33} \notin \mathbb{Z}$

(11) $y^2+y-5=-2$
$y^2+y-3=0$
$D=1+12=13$

(12) $y^2+y-5=2$
$y^2+y-7=0$
$D=1+28=29$
$\sqrt{29} \notin \mathbb{Z}$

Ответ: $(15;2)$; $(10;-3)$; $(-2;1)$, $(-5;-2)$

V

№3
$$\frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{2c}-\frac{1}{2}+\frac{b+c}{2a}-\frac{1}{2}+\frac{a+c}{2b}-\frac{1}{2} \geq \frac{3}{2}$$

$$\frac{a+b}{2c}+\frac{b+c}{2a}+\frac{a+c}{2b} \geq 3$$

1) рассмотрим 3 случая на примере дроби $\frac{a+c}{2b}$
2) чтобы достигалось равенство 3, каждый компонент должен быть равен 1.

(1): $\frac{a+c}{2b}<1$ $(a,b>0$ (по усл.)$)$

$\frac{a+c}{2}<b$

из неравенства о средних $\Rightarrow$ $b=\sqrt{ac}$, где $a<0$, $c<0$, что противоречит условию, значит $\frac{a+c}{2b} \geq 1$

(2): таким образом, рассматривая любые значения $a, b, c>0$ выполняется неравенство

$$\frac{a+b}{2c}+\frac{b+c}{2a}+\frac{a+c}{2b} \geq 3 \Rightarrow \frac{a+b-c}{2c}+\frac{b+c-a}{2a}+\frac{a+c-b}{2b} \geq \frac{3}{2}$$

ч. т. д.

6 б.

скобы

Шифр 07037

№4 Док-ть: $x_1^4+x_2^4 \geqslant 2+\sqrt{2}$

$x^2+px-\frac{1}{2p^2}=0$

(для удобства обозначим корни уравнения $x_1=x$, $x_2=y$)
применим Т. Виета для нахождения корней:

$\begin{cases} x_1+x_2=-p \\ x_1\cdot x_2=\frac{1}{2p^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y=-p \\ x\cdot y=-\frac{1}{2p^2} \end{cases}$

• чтобы из неравенства получить x^4+y^4, возведем $(x+y)^4$

$(x+y)^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4y^3x+y^4=(-p)^4=p^4$ (из Т. Виета)

$\Rightarrow x^4+y^4=p^4-4xy(x^2+y^2)-6x^2y^2$

т. к. $x\cdot y=-\frac{1}{2p^2}$, то

① $x^4+y^4=p^4+\frac{4(x^2+y^2)}{2p^2}-6\cdot\frac{1}{4p^4}$

② $x^2+y^2=(-p)^2-2xy=p^2+2\cdot\frac{1}{2p^2}=p^2+\frac{1}{p^2}=\frac{p^4+1}{p^2} \Rightarrow$ ①

$\Rightarrow x^4+y^4=p^4+\frac{2(p^4+1)}{p^4}-\frac{3}{2p^4}$

$x^4+y^4=p^4+\frac{4p^4+4-3}{2p^4}=p^4+2+\frac{1}{2p^4}$

$\Rightarrow p^4+2+\frac{1}{2p^4}\geqslant 2+\sqrt{2}$

$\frac{2p^8+1}{2p^4}-\sqrt{2}\geqslant 0$

$\frac{2p^8+1-2\sqrt{2}\cdot p^4}{2p^4}\geqslant 0$

$\frac{(\sqrt{2}p^4-1)^2}{2p^4}\geqslant 0$

т. к. $p\neq 0$ и $p^4>0$, $(\sqrt{2}p^4-1)^2\geqslant 0$, то $\frac{(\sqrt{2}p^4-1)^2}{2p^4}\geqslant 0$

$\Rightarrow x_1^4+x_2^4\geqslant 2+\sqrt{2}$

ч. т. д.

7 б

скобы

Шифр 07037

№2 $\cos 3\alpha = A \cdot \sin 2x$, $\sin 3\alpha = B \cdot \cos 4\alpha$ $\Rightarrow$

① $A = \frac{\cos 3x}{\sin 2x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos x - \sin 2x \cdot \sin x}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{\cos 2x \cdot \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x}{2\sin x \cdot \cos x} =$

$= \frac{\cos x(1 - 2\sin^2 x - 2\sin^2 x)}{2\sin x \cdot \cos x} = \frac{1 - 4\sin^2 x}{2\sin x} = \frac{1}{2\sin x} - 2\sin x \Rightarrow$ рац. число.

② $B = \frac{\sin 3\alpha}{\cos 4\alpha} = \frac{\sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x}{\cos 4x} = \frac{2\sin x \cdot \cos^2 x + \cos 2x \cdot \sin x}{\cos 4x} =$

$= \frac{\sin x(2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1)}{\cos 4x} = \left[\frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 2x - 1} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1}\right]$

$= \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 2x - 1} = \left[\frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2\left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right) - 1} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{\cos 2x} = \frac{\sin x(4\cos^2 x - 1)}{2\cos^2 x - 1}\right]$ — рац. число

③ $\sin 3x = \sin 2x \cdot \cos x + \cos 2x \cdot \sin x = 2\cos^2 x \cdot \sin x + \cos 2x \cdot \sin x =$
$= \sin x(2\cos^2 x + 2\cos^2 x - 1) = \sin x(4\cos^2 x - 1)$

из ① $\Rightarrow$ $\frac{1}{\sin\alpha} - \sin\alpha$ — рацион. число, т.к. 2 — рац. и $\frac{1}{2\sin x} - 2\sin x$ — рацион.

$\Rightarrow \frac{1}{\sin x} - \sin x = \frac{1 - \sin^2 x}{\sin x} = \frac{\cos^2 x}{\sin x} = \frac{1 + \cos 2x}{2\sin x} = \frac{1 + 1 - \sin^2 x}{2\sin x} = \frac{\cos^2\alpha}{\sin x}$ — рац. число

т.к. $\cos^2\alpha$ — рац. число (потому что cos во 2 степени) и $\frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}$ — рац. число,

то $\sin\alpha$ — рац. число; $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$ — рац. число;

$\Rightarrow$ ③ $\sin 3\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$

$\Rightarrow$ ② $B = \frac{\sin x(4\cos^2\alpha - 1)}{\cos 4x} \Rightarrow$ рац. число; и $\sin\alpha \cdot \cos^2\alpha$ — рац. число,

то $\sin x(4\cos^2 x - 1)$ — рац. число;

$\Rightarrow$ ③ $\sin 3\alpha = \sin\alpha(4\cos^2\alpha - 1)$ — рац. число.

ч.т.д.

7

15