ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004500
Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	В А С И Л Е Н К О
	Имя	С В Е Т Л А Н А
	Отчество	Е В Г Е Н Ь Е В Н А
5.	Дата рождения	14 (число) 08 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Посёлок городского типа
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Азов
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ СОШ 11

1	2	3	4	5	Σ
4	7	~~3~~ 1	6	6	~~26~~ 24

004500

1.

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}; \quad x-\frac{1}{x}; \quad \frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$$

1) Для удобства сделаем замену

$m = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$

$n = x - \frac{1}{x}$

$k = \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

2) Как мы можем заметить, все числа являются целыми => сумма этих целых чисел тоже будет целая.

3) Отметим так же, что m и k являются взаимнообратными числами по знаку.

4) $m+n = x - \frac{1}{x^2+2021}$ - такое значение, по сути, должно быть целым.

Однако $x - \frac{1}{x^2+2021}$ если здесь $\frac{1}{x^2+2021}$ (дробная) часть и $|x|>1$, то $\frac{1}{x}$ не может иметь такую же дробную часть.

Тогда $\frac{1}{x^2+2021}$ является дробью и <1

Поэтому число $x - \frac{1}{x^2+2021} = t \in Z$, у x схожа дробная часть с $\frac{1}{x}$. Однако, это выполняется только тогда, когда $x = \pm 1$. ? обоснование ?

5) Подставим значения ± 1 в изначальное ур-е и получим, что m и k - нецелые

6) $x - \frac{1}{x^2+2021} => \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ значение является целым только тогда, когда $\frac{1}{x} = \frac{1}{x^2+2021}$

целое число

$x^2 - x + 2021 = 0$ $\quad D<0$, поэтому не может быть.

Ответ: нет.

2.

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$.

1) Сделаем для удобства замену.

$m = \sin 2x$.

$k = \cos 4x$.

004500

2) $f(m) = m + m^5 + 2020 \cdot m^9$

$f(k) = k + k^5 + 2020 \cdot k^9$

3) Найдём производную от $f(m)$

$f'(m) = 1 + 5m^4 + 18180 m^8$

Заметим, что m^4 и m^8 всегда принимают значения ≥ 0. Следовательно, $f(m)$ монотонно возрастает

4) Найдём производную от $f(k)$

$f'(k) = 1 + 5k^4 + 18180k^8$

Заметим, что k^4 и k^8 всегда принимают значения ≥ 0. Следовательно, функция $f(k)$ монотонно возрастает

5) $\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x) + \sin(2x) - 1 = 0$

$\sin 2x = t$.

$2t^2 + t - 1 = 0$.

$D = 1 + 8 = 9$

$t_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} t_1 = -1 \\ t_2 = \frac{1}{2}. \end{matrix}$

6) $\left[\begin{array}{l} \sin 2x = -1 \\ \sin 2x = \frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k;\ k \in Z \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n;\ n \in Z \\ 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi m;\ m \in Z \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi k;\ k \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi n;\ n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi m;\ m \in Z \end{array}\right.$

3. $p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$ $n>1$ n - целое число 004500

1) Решим по т. Виета для многочлена n-ой степени.

p_i - это корни $i \in [1; t]$, где i является целым числом

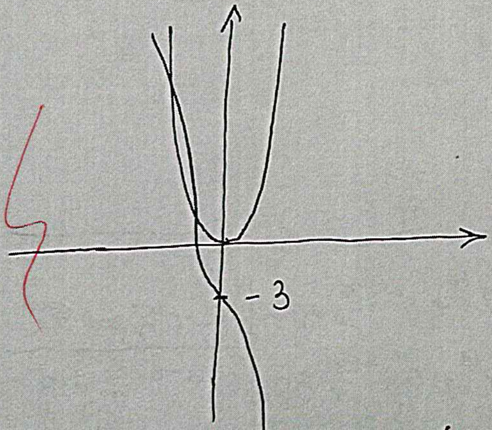
$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_t = -5 \\ p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_t = 3 \end{cases}$$

2) $p^n + 5p^{n-1} + 3 = 0$

$p^n = -5 \cdot p^{n-1} - 3$

3) Рассмотрим при n чётных

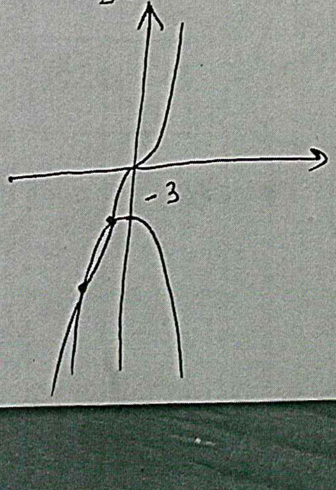
$y_1 = p^n$ $y_2 = -5p^{n-1} - 3$



получ. не более 2х отриц. корней

4) Рассмотрим при n нечётных

$y_1 = p^n$ $y_2 = -5p^{n-1} - 3$



получ. не боле 2х отриц. корней.

5) Заметим, что т.к. по т. Виета количество корней является чётным? ($p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_t = 3$)

Следовательно, получится 2 отриц. корня

6) $\begin{cases} p_1 + p_2 = -5 \\ p_1 \cdot p_2 = 3 \end{cases}$

$p^2 + 5p + 3 = 0$ (Данное уравнение имеет такие же решения).

$\Downarrow$

$p^2 + 5p + 3 = 0.$

$D = 25 - 12 = 13.$

$p_{1,2} = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

$\sqrt{13} \approx 3,6 \Rightarrow p_{1,2} = \dfrac{-5 \pm 3,6}{2} < 0 \Rightarrow p_{1,2} < 0.$

7) Из многочлена $K(p)$ можно отметить несколько множителей.

Первый: $f(p) = p^2 + 5p + 3$

Второй: $g(p) = p^{n-2} + (-3)p^{n-4} + \ldots + 1$.

Т.к. были найдены корни квадратного ур-я, которые сходятся с корнями, которые были найдены по т. Виета у исходного ур-я.

При этом, т.к. исходное ур-е при нечётн. и четных имеет 2 отриц. решения $\Rightarrow$ то, значения, что были найдены, можно выделить квадратный трёхчлен сомножитель.

$$\begin{array}{r|l} p^n + 5^{n-1} + 3 & p^2 + 5p + 3 \\ \hline - \; p^n + 5p^{n-1} + 3p & p^{n-2} - 3p^{n-4} + \ldots + 1 \\ \hline -3p^{n-2} + 3 & \\ - \; -3p^{n-2} - 15p^{n-3} & \\ \hline 15^{n-3} + \ldots & \end{array}$$

Поэтому, возможно.

Ответ: да, возможно

Ответ неверный
Неверн. обосн.

4.
$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\left(x^2+\sqrt[3]{2020^4}\right)} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\,x}{m+x^3}$$

$m>0,\ x>0$

1) Для удобства сделаем замену
$\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = p$.
$p>0$.
$$\frac{x^3}{m+p} + \frac{m}{x^3+p} + \frac{p}{m+x^3} \le \frac{3}{2}.$$

2) Заметим, что отношение и сумма положительных чисел будет положительна.

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{x^3}{m+p} + \frac{m}{x^3+p} + \frac{p}{m+x^3}} \ge \frac{2}{3}$$ (домножим на 3) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{3}{\frac{x^3}{m+p} + \frac{m}{x^3+p} + \frac{p}{m+x^3}} \ge 2$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{m+p}{x^3} + \frac{x^3+p}{m} + \frac{m+x^3}{p}}{3} \ge \frac{3}{\frac{x^3}{m+p} + \frac{m}{x^3+p} + \frac{p}{m+x^3}} \ge 2. \Rightarrow$$

(т.к. по неравенству о средних
$\frac{3}{\frac{1}{\cancel{x}}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}} \le \frac{x+y+z}{3}$ $\Rightarrow$ равенство может достигаться только в том случае, когда $x=y=z$).

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{m+p}{x^3} + \frac{x^3+p}{m} + \frac{m+x^3}{p}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m}+\frac{p}{x^3}+\frac{x^3}{p}+\frac{p}{m}+\frac{m}{p}\right) \geq 2.$$

$$\frac{m}{x^3}+\frac{x^3}{m} \geq 2; \quad \frac{p}{x^3}+\frac{x^3}{p} \geq 2; \quad \frac{p}{m}+\frac{m}{p} \geq 2$$

3) Как мы можем заметить, оценка в дальнейшем будет достигаться при таких же условиях, как и в изначальном нер-ве

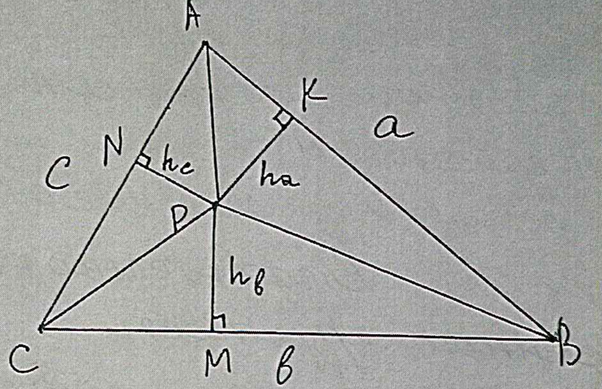
$$\begin{cases} x^3 = m \\ x^3 = p \\ m = p \end{cases} \Rightarrow \quad x^3 = \sqrt[3]{2020^4} \cdot x$$

4) Т.к. $x > 0 \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2020^2} > 0.$

$\Rightarrow m = 2020^2$

Ответ: $m = 2020^2$

5.



1) Обозначим $AB=a$, $BC=b$ и $AC=c$ для удобства.

2) Обозначим $PK=h_a$, $PM=h_b$, $PN=h_c$.

$\Rightarrow \min\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right)$

3) $S_{ABC}=S_{APB}+S_{BPC}+S_{APC}=\frac{1}{2}a\cdot h_a+\frac{1}{2}b\cdot h_b+\frac{1}{2}c\cdot h_c$

4) $2S_{ABC}=a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c$.

5) Домножим на $\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right)$

$$\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right)\cdot 2\cdot S_{ABC}=\left(\frac{a}{h_a}+\frac{b}{h_b}+\frac{c}{h_c}\right)(a\cdot h_a+b\cdot h_b+c\cdot h_c)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2+\frac{ab\cdot h_b}{h_a}+\frac{ac\cdot h_c}{h_a}+\frac{ba\cdot h_a}{h_b}+\frac{ac\cdot h_a}{h_c}+\frac{bc\cdot h_b}{h_c}=$$

$$=a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_b}\right)+ac\left(\frac{h_c}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}\right)+bc\left(\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}\right)$$

6) Заметим, что $\frac{h_c}{h_a}$ и $\frac{h_a}{h_c}$ являются взаимообр. числами, поэтому, по неравенству о средних, мы можем сказать, что $\frac{h_c}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}\geq 2$.

Аналогично докажем, что

$\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_b}\geq 2$; $\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}\geq 2$

7) Следовательно,

$$a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{h_b}{h_a}+\frac{h_a}{h_b}\right)+ac\left(\frac{h_c}{h_a}+\frac{h_a}{h_c}\right)+bc\left(\frac{h_c}{h_b}+\frac{h_b}{h_c}\right)\geq a^2+b^2+c^2$$

$$+\,2ab+2ac+2bc.$$

8) Исходя из всего этого, можем сделать вывод, что минимальное значение в этом нер-ве будет тогда, когда левая и правая части будут равны. Поэтому $h_a=h_b=h_c$. Т.к. наше неравенство достигается только при равенстве слагаемых.

9) Следовательно, т. P является центром вписанной окружности.