ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004501
Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	В А С И Л Е Н К О
	Имя	А Н Ж Е Л И К А
	Отчество	В А Д И М О В Н А
5.	Дата рождения	17 (число) 02 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Не задан
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	г Пушкин
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ школа №606

1	2	3	4	5	Σ
4	5	3	3	4	19

Место для скобы

Шифр 004501

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

~~N1.~~

~~1. Заметим, что первое и третье числа~~ $\cancel{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}\right)}$ ~~и~~ $\cancel{\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)}$ ~~равны по модулю => если одно из них целое, то и другое целое.~~

~~Значит, одновременно целыми должны быть только 2 числа:~~ $\cancel{\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}}$ ~~и~~

~~Условие бы могло выполняться, если бы~~

$\cancel{x-\frac{1}{x}}$

$\boxed{N3}$

$P(t)=t^n+5t^{n-1}+3$

При некотором разложении $P(t)$ на множители он примет такой вид: $(t-a)(t-b)\ldots(t-n)$ (t^2+bt+c)?

По теореме Виета для уравнений высокой степени произведение $a\cdot b\cdot\ldots\cdot n$ для $P(t)=3$

~~Т.к. у числа 3 только 2 делителя (3 и 1)~~,

Как было бы можно разбить $P(t)$ на множители? При неком $n=k$ (по индукции)

$t^k+5t^{k-1}+3$

$t^k+2t^{k-1}+3t^{k-1}+3$

$t^{k-1}(t+2)+3(t^{k-1}+1)$

$t+2<t^{k-1}+1$ при $k>1$

Рассмотрим $n=k+1$

$t^{k+1}+5t^k+3$

$t^{k+1}+2t^k+3t^k+3$

$t^k(t+2)+3(\underline{t^k+1})$

База: $(n=k=2)$ 3

$\cancel{t^2+5t+3}$

$\cancel{t^2+3t+2t+3}$

$\cancel{t(t+2)+3(t+1)}$

t^3+5t^2+3

$t^3+2t^2+3t^2+3$

$t^2(t+2)+3(t^2+1)$

$\underbrace{t^2+1}_{\text{всегда положительно}}>t+2$

При $n=2$ t^2+5t+3

$D=25-12=13$

$t_{1,2}=\frac{-5\pm\sqrt{13}}{2}$ => с целыми коэф-тами разбить не получится по $(t-t_1)(t-t_2)$

Правая скобка с шагом индукции увеличивается, на первом шаге правая скобка была и так больше левой (а она не меняется) => правая и левая скобки с увеличением k никогда не уравняются (а минимальное мы проверили) => на множители разбить невозможно

Ответ: нет

$\boxed{N1}$

Заметим, что если какие-то 2 числа являются целыми, то их сумма и разность также целые.

Предположим, что предложенные числа могут быть одновременно целыми. В таком случае разность $\left(x-\frac{1}{x}-\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)\right)$ так же должна быть целой. А возможно ли это? Проверим

$$x-\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=x-\frac{1}{x^2+2021}=\frac{x(x^2+2021)-1}{x^2+2021}$$

Т.к. первое слагаемое числителя сокращается со знаменателем, (может $x\notin\mathbb{Z}$?) то, чтобы дробь в целом оказалась целой, 1 тоже должен сократиться. Это возможно только при $1=x^2+2021$ (т.к. других делителей у 1 нет) $x^2=-2020$ – это невозможно (т.к. $a^2\geq 0$) => ~~дро~~ рассматриваемая дробь не может быть целой => наше предположение неверно и все 3 числа не могут одновременно быть целыми.

Ответ: НЕТ.

Место для скобы

Шифр 004501

N2

Пусть $\alpha = 2x$

$\sin\alpha + \sin^5\alpha + 2020\sin^9\alpha = \cos 2\alpha + \cos^5 2\alpha + 2020\cos^9 2\alpha$ ⊛

$\sin\alpha + \sin^5\alpha + 2020\sin^9\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + (1-2\sin^2\alpha)^5 + 2020(1-2\sin^2\alpha)^9$

$(1-2\sin\alpha)^5(1+2\sin\alpha)^5$ $\quad (1-2\sin\alpha)^9(1+2\sin\alpha)^9$

с помощью треугольника 1 1 2 1 3 3 ...

$(a+b)^5 = (a^5 + 5a^4b^1 + 10a^3b^2 + 10b^3a^2 + 5ab^4 + b^5)$

$(a-b)^5$ $\quad -\quad -\quad -$

$(1-2\sin^2\alpha) = (1 - 5(2\sin^2\alpha) + 10(2\sin^2\alpha)^2 - 10(2\sin^2\alpha)^3 + 5(2\sin^2\alpha)^4 - (2\sin^2\alpha)^5)$

$= 1 - 10\sin^2\alpha + 40\sin^4\alpha - 80\sin^6\alpha + 80\sin^8\alpha - 32\sin^{10}\alpha$. (1)

~~$(a-b)^9 = (a^9 - 8a^8b + 28a^7b^2 - 56a^6b^3 + 70a$~~

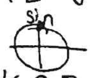
$(a-b)^9 = (a^9 - 9a^8b + 36a^7b^2 - 84a^6b^3 + 126a^5b^4 - 126a^4b^5 + 84a^3b^6 - 36a^2b^7 + 9a^1b^8 - b^9$

$(1-2\sin^2\alpha)^9 = 1 - 9\cdot 2\sin^2\alpha + 36\cdot 4\sin^4\alpha - 84\cdot 8\sin^6\alpha + 126\cdot 16\sin^8\alpha - 126\cdot 32\cdot\sin^{10}\alpha + 84\cdot 64\cdot\sin^{12}\alpha - 36\cdot 128\cdot\sin^{14}\alpha$
$+ 9\cdot 256\cdot\sin^{16}\alpha - 512\sin^{18}\alpha$ (2)

⊛ Заметим, что при $\cos 2\alpha = \sin\alpha$ выражение верно (обе части становятся идентичными) $\Rightarrow$ $\cos 2\alpha = \sin\alpha$ – решение. Рассмотрим этот случай

$\cos 2\alpha = \sin\alpha$; $1 - 2\sin^2\alpha = \sin\alpha$; $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$; $D = 1 + 4\cdot 2 = 9$ $\quad \sin\alpha = \frac{-1\pm 3}{2}$ корни найдены неверно

Подходит только $\sin\alpha = \frac{2}{2} = 1$ (т.к. $-1 \le \sin\alpha \le 1$) Если $\sin\alpha = 1$ то $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$



$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ в ответ. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$

Вернемся к полному решению и подставим в уравнение (1) и (2)

$\sin\alpha + \sin^5\alpha + 2020\sin^9\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha + 1 - 10\sin^2\alpha + 40\sin^4\alpha - 80\sin^6\alpha + 80\sin^8\alpha - 32\sin^{10}\alpha +$
$+ 2020(1 - 18\sin^2\alpha + 144\sin^4\alpha - 672\sin^6\alpha + 126\cdot 16\sin^8\alpha - 126\cdot 32\sin^{10}\alpha + 84\cdot 64\sin^{12}\alpha - 36\cdot 128\sin^{14}\alpha$
$+ 9\cdot 256\sin^{16}\alpha - 512\sin^{18}\alpha)$.

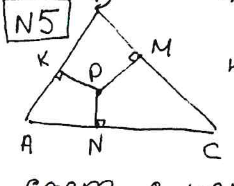
Замена: Пусть $\sin\alpha = t$

$t + t^5 + 2020t^9 = 2 + 2020 - \cancel{12\sin^2\alpha + 40\sin^4\alpha - 80\sin^6\alpha + 80} - 12t^2 + 40t^4 - 80t^6 + 80t^8 - 32t^{10} +$
$+ 2020(-18t^2 + 144t^4 - 676t^6 + 126\cdot 16t^8 - 126\cdot 32t^{10} + 84\cdot 64t^{12} - 36\cdot 128t^{14} + 9\cdot 256t^{16} - 512t^{18})$

Теперь нужно по теореме Безу поподставлять на место t делители 2022 (это 2, 3 и 337), 1, 2022)
...

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in Z$

N5



Т.к. стороны BC, AC, и AB треугольника не меняются $\Rightarrow$ для минимальной суммы PM, PN и PK должны быть как можно больше.

Положение точки P в момент, когда PM, PN и PK одновременно получают такую длину, чтобы каждый из них был максимально возможным при уже заданных наибольших 2х других, совпадает с центром вписанной окружности в $\triangle ABC$ $\Rightarrow$ и в точку пересечения биссектрис $\triangle ABC$.

Ответ: точка – центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности; точка пересеч. бис-с $\triangle ABC$

Примечание: точка P не может совпадать ни с какой из вершин A, B, C т.к. тогда бы какие-то 2 из отрезков PM, PN и PK были бы равны 0, а на нуль делить нельзя $\Rightarrow$ выражение (сумма) не существует.

Место для скобы

№4

Шифр 004501

Пусть $\sqrt[3]{2020^4}=a$; $a>0$ (любое число в какой-либо степени не бывает меньше 0)

$$\frac{x^3}{m+ax}\leq\frac{3}{2}\frac{m}{x(x^2+a)}-\frac{ax}{m+x^3};\quad 0\leq\frac{3}{2}\cdot\frac{m}{x^2+ax}-\frac{ax}{m+x^3}-\frac{x^3}{m+ax}$$

$$\frac{3m(m+x^3)(m+ax)-2ax(x^3+ax)(m+ax)-2x^3(x^3+ax)(m+x^3)}{2(x^3+ax)(m+x^3)(m+ax)}\geq 0$$

$$\frac{3m(m+x^3)(m+ax)-2x(x^3+ax)(a(m+ax)-x^2(m+x^3))}{2(x^3+ax)(m+x^3)(m+ax)}\geq 0$$

т.к. мы ищем положительные m, при которых есть положительные x, а $a=2020^{\frac{4}{3}}$ всегда положительно => знаменатель дроби (в рассматриваемом случае) всегда положителен => знак не изменится, если выражение домножить на знаменатель. Получим:

$$3m(m+x^3)(m+ax)-2x(x^3+ax)(a(m+ax)-x^2(m+x^3))\geq 0$$

$$\underbrace{3m(m+x^3)(m+ax)}_{\text{всегда положительно при } x>0 \text{ и } m>0}\geq\underbrace{2x(x^3+ax)}_{\text{всегда полож. при } x>0 \text{ и } m>0}\underbrace{(a(m+ax)-x^2(m+x^3))}\quad (2)$$

Если бы эта часть была отрицательной, то неравенство бы выполнялось независимо от m и x, т.к. левая часть строго положительна, а также $2x(x^3+ax)$

Примечание: мы рассматриваем случай, когда $x>0$, $m>0$ и $a>0$.

$$a(m+ax)<x^2(m+x^3)$$

$$\sqrt[3]{2020^4}(m+\sqrt[3]{2020^4}x)<x^2(m+x^3)\quad (1)$$

Подберем пример подходящих x и m

$x=2020^7$, $m=1$

$$2020^{\frac{4}{3}}(1+2020^{\frac{4}{3}}2020^{7})<2020^{14}+2020^{17}$$

$$2020^{\frac{4}{3}}+2020^{\frac{8}{3}+7}<2020^{14}+2020^{17}$$

Выполняется. ✓

Заметим, что когда x сильно больше m, то неравенство (1) выполняется (т.к. m не значительно влияет на суммы, т.к. разница степеней x в левой и правой части значительная.)

Т.к. положительных чисел бесконечно много, то для любого большого m можно найти значительно бо́льший его x и неравенство выполнится. => Все $m>0$ подходят.

Т.к. все $m>0$ подходят нет смысла рассматривать случай, когда обе части (2) положит.

Ответ: $m\in(0;+\infty)$.