ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004529

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	В А К Ш И Н
	Имя	А Л Е К С А Н Д Р
	Отчество	С Е Р Г Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	28 (число) 07 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ Школа №1533 "ЛИТ"

1	2	3	4	5	Σ
5	7	7	7	7	~~26~~ 33

Место для скобы

Шифр 004529

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

N1

$\sqrt{x^2+2020}-x$, $\qquad\qquad x - ?$

$\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$, $\quad \ni \mathbb{Z}$

$2x-\sqrt{x^2+2020}$

50, 260 ×

будут целыми не обосновано

1) Все три числа будут целыми, если найдется такое целое x, что (x^2+2020) и (x^2+2) – точные квадраты и из них извлекается квадратный корень.

Т.е. $x^2+2=a^2$, но тогда $a^2-x^2=2$

$$(a-x)(a+x)=2$$

Уравнение в целых числах, равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a-x=1\\a+x=2\end{cases}\\ \begin{cases}a-x=2\\a+x=1\end{cases}\\ \begin{cases}a-x=-1\\a+x=-2\end{cases}\\ \begin{cases}a-x=-2\\a+x=-1\end{cases}\end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}2a=3\\a-x=1\end{cases} & a\notin\mathbb{Z}\\ \begin{cases}2a=3\\a-x=2\end{cases} & a\notin\mathbb{Z}\\ \begin{cases}2a=-3\\a-x=-1\end{cases} & a\notin\mathbb{Z}\\ \begin{cases}2a=-3\\a-x=-2\end{cases} & a\notin\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Т.е. нет таких a, т.е. $\sqrt{x^2+2}$ не может быть целым ни при каком целом x. ?

не обосновано

Место для скобы

Шифр 004529

№1 (продолжение)

2) Если предположить, что найдется нецелое x удовлетворяющее условию задачи, то тогда „хвосты" после запятой у чисел $\sqrt{x^2+2020}$, x, $2x$, $\sqrt{x^2+2}$ должны быть одинаковыми (чтобы в разности эти „хвосты" взаимно уничтожились, и получились целые значения). Но в нашем случае $x-\sqrt{x^2+2020}$ и $2x-\sqrt{x^2+2020}$ не могут одновременно стать целыми.

Ответ: не существует

Место для скобы

Шифр 004529

№2 Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y \\ xy + yz = -y \end{cases} \qquad \begin{cases} 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y \\ y(x+z+1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x+z+1=0 \end{array}\right. \\ 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y \end{cases} \\ \begin{cases} x+z+1=0 \\ 3xy - 5yz - xz = 3y \\ -5xy + 4yz + xz = -4y \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ -xz = 0 \\ xz = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1-z \\ 3(-1-z)y - 5yz - (-1-z)z = 3y \\ -5(-1-z)y + 4yz + (-1-z)z = -4y \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \\ z - \text{любое} \end{cases} \\ \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ x - \text{любое} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1-z \\ -3y - 3yz - 5yz + z^2 = 3y \\ 5y + 5yz + 4zy - z - z^2 = -4y \end{cases} \end{array}\right.$$

Будем отдельно решать третью систему совокупности:

Место для скобы

Шифр

№2 (продолжение)

$$\begin{cases} x=-1-z \\ z^2+z-8yz-6y=0 \\ -z^2-z+9yz+9y=0 \end{cases} \oplus \qquad \begin{cases} x=-1-z \\ yz+3y=0 \\ z^2+z-8yz-6y=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=-1-z \\ y(z+3)=0 \\ z^2+z-8yz-6y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-1-z \\ \left[\begin{array}{l} y=0 \\ z=-3 \end{array}\right. \\ z^2+z-8yz-6y=0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1-z \\ y=0 \\ z^2+z-8yz-6y=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-z \\ z=-3 \\ z^2+z-8yz-6y=0 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=-1-z \\ y=0 \\ z^2+z=0 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-1-z \\ z=-3 \\ 9-3+24y-6y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=-1 \end{array}\right. \\ x=-1-z \end{cases} \\ \begin{cases} z=-3 \\ x=-1-z \\ 18y=-6 \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=-1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=0 \\ z=-1 \\ x=0 \end{cases} \\ \begin{cases} z=-3 \\ x=2 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} \end{array}\right.$$

Итак, получаем:

$$\left[\begin{array}{ll} \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z - \text{любое} \end{cases} & (**) \\ \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x - \text{любое} \end{cases} & (*) \\ \begin{cases} y=0 \\ z=0 \\ x=-1 \end{cases} & \text{это решение включено в } (*) \\ \begin{cases} y=0 \\ x=0 \\ z=-1 \end{cases} & \text{это решение включено в } (**) \\ \begin{cases} z=-3 \\ x=2 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases} & \end{array}\right.$$

Ответ (в формате $(x;y;z)$):
$(0; 0;$ любое действ. число$)$
$($любое число$; 0; 0)$
$(2; -\frac{1}{3}; -3)$

Место для скобы

Шифр

№3 $f(x)$ - квадратной трехчлен

$f(0)+f(1)=0 \qquad f(2)+f(3)=0$

сумма корней $f(x)=2022$ -?

$f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

$\begin{cases} f(0)+f(1)=0 \\ f(2)+f(3)=0 \end{cases} \begin{cases} c+a+b+c=0 \\ 4a+2b+c+9a+3b+c=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2c+a+b=0 \\ 13a+5b+2c=0 \end{cases} \begin{cases} 2c=-a-b \\ 13a+5b-a-b=0 \end{cases} \begin{cases} 2c=-a-b \\ 12a+4b=0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2c=-a-(-3a) \\ b=-3a \end{cases} \begin{cases} 2c=2a \\ b=-3a \end{cases} \begin{cases} c=a \\ b=-3a \end{cases}$

$f(x)=2022$

$ax^2+bx+c=2022$

$ax^2-3ax+a=2022 \quad | : a\neq 0$

$x^2-3x+1=\frac{2022}{a}$

квадратное уравнение

$x^2-3x+1-\frac{2022}{a}=0$

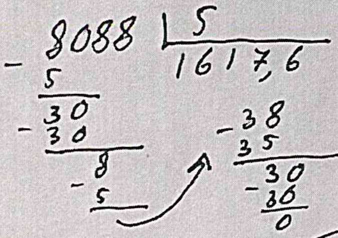
Это уравнение не всегда имеет действительные корни. Но если говорить о любых корнях (в том числе комплексно-сопряженных), то их сумма по Теореме Виетта равна $-(-3)=3$.

Действительные же корни уравнение имеет, если $D\geq 0$.

Место для скобы

Шифр

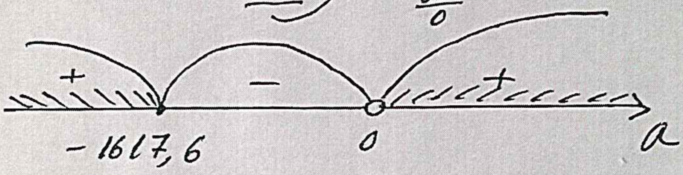
№3 (продолжение)



$$9-4\left(1-\frac{2022}{a}\right)\geq 0$$

$$9-4+\frac{8088}{a}\geq 0$$

$$\frac{8088+5a}{a}\geq 0$$



при $a\in[-\infty;-1617{,}6]\cup(0;+\infty)$: 3 – сумма действительных корней уравнения

при остальных допустимых a: 3 – сумма комплексных корней уравнения
$(a\in(-1617{,}6;0))$

(a – старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$)

Ответ: 3

(при $a\in[-\infty;-1617{,}6]\cup(0;+\infty)$: 3 – сумма действительных корней уравнения

при $a\in(-1617{,}6;0)$: 3 – сумма комплексных корней уравнения
остальные допустимые a

a – старший коэффициент квадратного трехчлена $f(x)$)

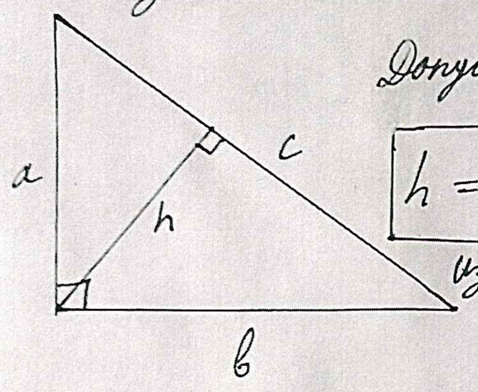
Место для скобы

Шифр

№5

Возможно ли: $c+h < a+b$?

$a>0$
$b>0$
$c>0$
$h>0$



Допустим, что $c+h<a+b$, тогда

$\boxed{h=\frac{ab}{c}}$ из S_Δ

$c+\frac{ab}{c}<a+b$

$\frac{c^2+ab}{c}<a+b$

$\boxed{c^2=a^2+b^2}$ по Т Пифагора в п/у Δ

$\frac{a^2+b^2+ab}{c}<a+b$

выделим полный квадрат

$\frac{(a+b)^2-ab}{c}<a+b \;\Big|\cdot c>0$

$(a+b)^2-ab<(a+b)c$

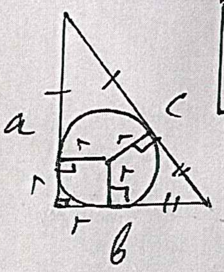
$(a+b)^2-(a+b)c<ab$

$(a+b)(a+b-c)<ab$

$(a+b)(a+b-c)<ab \;\Big|:2$

$(a+b)\underbrace{\frac{a+b-c}{2}}_{r\text{ впис.}}<\frac{ab}{2}$

Вспомним важную задачу:



$\boxed{r_{\text{впис.}}=\frac{a+b-c}{2}}$

r вписанной окружности для прямоуг. Δ

$(a+b)\cdot r_{\text{вп.}}<\underbrace{\frac{ab}{2}}_{S\,п/у\,\Delta}\qquad(*)$

Выполним оценку выражения $(a+b)\cdot r_{\text{вп.}}$:

$c<a+b$ (неравенство треугольника)

$\frac{a+b+c}{2}=\frac{a+b}{2}+\underbrace{\frac{c}{2}}_{<\frac{a+b}{2}}<\frac{a+b}{2}+\frac{a+b}{2}=a+b$

Место для скобы

Шифр

N5 (продолжение)

Значит:

$S_{n/y\triangle} = \left(\frac{a+b+c}{2}\right)\cdot r_{вп.} < (a+b) r_{вп.}$

Т.е. мы доказали, что $(a+b) r_{вп.} > S_{n/y\triangle}$

$\Rightarrow$ неравенство $(*)$ неверно $\Rightarrow$ исходное неравенство

$c+h < a+b$ неверно. Значит, такое не может быть.

Ответ: невозможно

Место для скобы

Шифр

№4 Доказать, что:

$$\sqrt[2020]{2019\cdot 2020^{-1}} + \sqrt[2020]{2020\cdot 2017^{-1}} > 2$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} > 2$$

Рассмотрим следующее утверждение:

$$\boxed{a+\frac{1}{a}\geq 2} \qquad a\neq 0$$

Докажем его от противного:

Пусть $a+\frac{1}{a}<2$, тогда $a^2+1<2a$

$a^2-2a+1<0$

$(a-1)^2<0$ неверно $\left(()^2\geq 0\right)$ $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow a+\frac{1}{a}\geq 2$

Тогда рассмотрим сумму $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}} =$

$$= \underbrace{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}}_{a} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}}}_{\frac{1}{a}} \geq 2$$ значит, это верно.

Тогда получаем:

$$2 \leq \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \underbrace{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}}_{<\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}} < \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$$

(знаменатель ↓ ⇒ подкоренное выражение ↑ ⇒ корень ↑)

Т.е. $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} \geq 2$ доказано.

ч.т.д.