ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА
ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004510

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	ТЫНАЕВА
	Имя	АЛИНА
	Отчество	МОМУНЖАНОВНА
5.	Дата рождения	09 (число) 08 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Красноярский край
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Красноярск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	СОШ№14

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	–	7	28

004510

Чистовик Лист №1

№1.

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y & (1) \\ -5xy+4yz+xz=-4y & (2) \\ xy+yz=-y & (3) \end{cases}$$

Упростим (3)

$xy+yz=-y$

$xy+yz+y=0$

$y(x+z+1)=0$

$y=0$ или $x+z+1=0$

1) Если $y=0$, то:

$$\begin{cases} 3x\cdot 0-5\cdot 0\cdot z-x\cdot z=3\cdot 0 \\ -5x\cdot 0+4\cdot 0\cdot z+x\cdot z=-4\cdot 0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x\cdot z=0 \\ x\cdot z=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

Получаем следующие пары

$x=0$ и $z\in\mathbb{R}$

$z=0$ и $x\in\mathbb{R}$

Корни уравнения $(0;0;z\in\mathbb{R})$, $(x\in R;0;0)$

2) Если $x+z+1=0$, то $z=-x-1$ Подставим значения:

$$\begin{cases} 3xy-5y\cdot(-x-1)-x(-x-1)=3y \\ -5xy+4y(-x-1)+x(-x-1)=-4y \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy+5xy+5y+x^2+x=3y \\ -5xy-4xy-4y-x^2-x=-4y \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8xy+2y+x+x^2=0 \\ -9xy-x-x^2=0 \\ 0=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8xy+2y+x+x^2=0 \\ -xy+2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \quad (4)$$

Решим (4)

$-xy+2y=0$

$y(-x+2)=0$

$y=0$ или $-x+2=0$

$x=2$

Если $x=2$, то $z=-x-1=-2-1=-3$

Подставляем найденные корни во (2) уравнение:

$-5\cdot 2\cdot y+4\cdot(-3)\cdot y+2\cdot(-3)=-4\cdot y$

$-10y-12y-6=-4y$

$-18y=6$

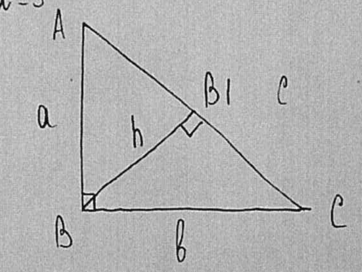
$y=-\frac{1}{3}$

Ответ: $(x=0;y=0;z\in\mathbb{R})$, $(x\in\mathbb{R};y=0;z=0)$, $(x=2;y=-\frac{1}{3};z=-3)$

004510

Чистовик Лист №2

№5



Дано:

$\triangle ABC$ - прямоугольный треугольник

BB_1 - высота, проведенная к гипотенузе

Найти: возможно ли, чтобы сумма $c+h < a+b$

Решение:

1. Отметим катеты AB, BC как a и b соответственно, а гипотенузу AC как c, высоту BB_1 как h.
2. Рассмотрим $\triangle ABC$ и $\triangle BB_1C$

$\angle C$ - общий угол

$\angle BB_1C = \angle ABC = 90°$

$\triangle ABC \sim \triangle BB_1C$ по двум углам. $\Rightarrow \frac{AB}{BB_1} = \frac{AC}{BC} = \frac{BC}{B_1C} = k$, где k - коэффициент подобия.

Отметим стороны и высоту по пункту 1, получаем:

$\frac{a}{h} = \frac{c}{b} = \frac{b}{B_1C} = k$; $\frac{a}{h} = \frac{c}{b} \Rightarrow h \cdot c = a \cdot b$

3. По условию задачи мы должны узнать: возможно ли, что:

$h + c < a + b$

Возведём обе части в квадрат, при этом знак неравенства не меняется, т.к. величины сторон, высоты всегда положительны.

$(h+c)^2 < (a+b)^2$

$h^2+2hc+c^2 < a^2+2ab+b^2$

$a^2+b^2=c^2$ по теореме Пифагора, тогда:

$h^2+2hc+c^2 < 2ab+c^2$ / из обеих частей вычтем c^2

$h^2+2hc < 2ab$

По пункту 2 мы знаем, что $h \cdot c = a \cdot b$, значит

$h^2+2hc < 2hc$ противоречие, значит $c+h > a+b$

Ответ: Невозможно, чтобы сумма $c+h$ была меньше суммы $a+b$.

№3 Чистовик Лист №3 004510

$f(0)+f(1)=0$; $f(2)+f(3)=0$

Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, тогда

$f(0)+f(1)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+2c=0$

$f(2)+f(3)=a\cdot 2^2+b\cdot 2+c+a\cdot 3^2+b\cdot 3+c=4a+2b+c+9a+3b+c=$
$=13a+5b+2c=0$

Получаем:

$$\begin{cases} a+b+2c=0 \\ 13a+5b+2c=0 \end{cases}$$

Нам нужно найти сумму корней уравнения $f(x)=2022$

Это значит, что свободный коэффициент $c=2022$. Тогда:

$$\begin{cases} a+b+2\cdot 2022=0 \\ 13a+5b+2\cdot 2022=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4044-a \\ 13a+5(-4044-a)+4044=0 \quad (1) \end{cases}$$

Найдем a:

$13a-20220-5a+4044=0$

$8a=16176$

$a=\frac{16176}{8}=2022 \Rightarrow b=-4044-a=-4044-2022=-6066$

По теореме Виета сумма корней уравнения равна $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$

В $f(x)=2022$, $x_1+x_2=\frac{-b}{a}=\frac{-(-6066)}{2022}=3$

Ответ: сумма корней равна 3.

Чистовик Лист № 4

№ 1.

Построим наше решение от обратного. Допустим, что есть такое число x при котором $\sqrt{x^2+2020}-x$, $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$, $2x-\sqrt{x^2+2020}$ целые числа. Сложим эти числа, тогда при сложении целых чисел получим целое число.

$$\sqrt{x^2+2020}-x+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}+2x-\sqrt{x^2+2020}=$$
$$=x+\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020} \text{ - целое число (1)}$$

Если данное выражение (1) целое число, то каждое слагаемое должно быть целым числом. => x - целое число, $\sqrt{x^2+2}$ - целое число, $\sqrt{x^2+2020}$ - целое число

Рассмотрим следующий случай x - целое число, $\sqrt{x^2+2}$ - целое число

Выпишем ряд целых чисел и их разницы, какими они могут быть

$$(2)\quad \underbrace{0^2=0,\ (\pm1)^2=1}_{\text{разница } 1},\ \underbrace{(\pm1)^2=1,\ (\pm2)^2=4}_{\text{разница } 3},\ \underbrace{(\pm2)^2=4,\ (\pm3)^2=9}_{\text{разница } 5},\ \underbrace{(\pm3)^2=9,\ (\pm4)^2=16}_{\text{разница } 7},\ \underbrace{(\pm4)^2=16,\ (\pm5)^2=25}_{\text{разница } 9}\ \dots$$

Число x - одно из чисел ряда, заметим, что x^2 и в подвыражении $\underbrace{\sqrt{x^2+2}}_{\text{разница } 2}$ разница между квадратом числа 2, но в ряде (2) видно, что разница увеличивается и не равна 2 (1, 3, 5, 7....)

Следовательно, нет числа x, такого, чтобы и x, и $\sqrt{x^2+2020}$ были целыми числами.

Получаем, что наше допущение неверно, и такого числа x нет, чтобы все выражения были целыми.

Доказано.