ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004511

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	ТУЛУПОВ
	Имя	НИКОЛАЙ
	Отчество	ДМИТРИЕВИЧ
5.	Дата рождения	08 (число) 05 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Брянская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Брянск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	БГЛ №1 им. А.С. Пушкина

1	2	3	4	5	Σ
6	7	7	–	7	27

Место для скобы

Шифр 004511

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

№1 Существует ли x, чтобы числа $\sqrt{x^2+2020}-x$, $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$, $2x-\sqrt{x^2+2020}$ целые?

Предположим, что все 3 числа целые.

1е и 3е число представляют собой разность 2х чисел. Разность 2х чисел будет целой, если будут равны их дробные части: $(a-b)\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{a\}=\{b\}$.

Тогда: $(\sqrt{x^2+2020}-x)\in \mathbb{Z} \Rightarrow \{\sqrt{x^2+2020}\}=\{x\}$; $(2x-\sqrt{x^2+2020})\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{2x\}=\{\sqrt{x^2+2020}\}$

$$\Rightarrow \begin{cases}\{2x\}=\{\sqrt{x^2+2020}\}\\ \{\sqrt{x^2+2020}\}=\{x\}\end{cases} \Rightarrow \{2x\}=\{x\}.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) Если $0\le\{x\}<\frac{1}{2}$, то $\{2x\}=2\{x\}=\{x\}$

2) Если $\frac{1}{2}\le\{x\}<1$, то $\{2x\}=2\{x\}-1=\{x\}$

Произведем замену $a=\{x\}$ и решим совокупность уравнений

$$\left[\begin{array}{l}2a=a\\2a-1=a\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}a=0\\a=1\end{array}\right.$$ т.к. $a=\{x\}$, то $a=0$ или $a=1 \Rightarrow \underbrace{x\in \mathbb{Z}}_{\{x\}=0}$.

Получаем, что чтобы 1е и 3е числа были целыми, x д.б. целым.

Рассмотрим 2е число: аналогично: $(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020})\in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \{\sqrt{x^2+2}\}=\{\sqrt{x^2+2020}\}$.

Т.к. $\{x\}=\{\sqrt{x^2+2020}\}$, то $\{\sqrt{x^2+2020}\}=0$ и $\{\sqrt{x^2+2}\}=0$, $\sqrt{x^2+2}\in \mathbb{Z}$.

Если $(\sqrt{x^2+2})\in \mathbb{Z}$, то (x^2+2) - полный квадрат.

Тогда т.к. $x\in \mathbb{Z}$ и $(x^2+2)\in \mathbb{Z}$, $\Rightarrow$ $x=k^2$
$x^2+2=n^2$

, т.е. получаем существование 2 квадрата целых чисел, разница между которыми $=2$, но таких чисел нет.

Т.к. нет таких целых чисел x и n, чтобы $x^2+2=n^2$, то не существует такого целого x.

(нет, т.к. $x^2-n^2=-2$; $n^2-x^2=2$; $(n-x)(n+x)=2$

Т.к. $n>x$, то $\left[\begin{array}{l}\begin{cases}n-x=2\\n+x=1\end{cases}\\ \begin{cases}n-x=1\\n+x=2\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \varnothing$.

почему нет? не обосновано

Ответ: нет

Место для скобы

Шифр 004511

№2 Решить систему:

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y & (1)\\ -5xy+4yz+xz=-4y & (2)\\ xy+yz=-y. & (3)\end{cases}$$

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y\\ -5xy+4yz+xz=-4y\\ xy+yz=-y\end{cases} \Rightarrow + \begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y\\ -5xy+4yz+xz=-4y\\ -xy-yz=y\end{cases}$$

$$3xy-5yz-\cancel{xz}-5xy+4yz+\cancel{xz}-xy-yz=3y-4y+y.$$

$$-3xy-2yz=0.$$

$$3xy+2yz=0.$$

$$y(3x+2z)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0\\ 3x+2z=0,\ y\neq 0.\end{array}\right.$$

Если $y=0$, то: (1): $0-0-xz=3\cdot 0$, $xz=0$

(3): $0+0=0$; (2): $-0+0+xz=0$, $xz=0$.

$\Rightarrow$ из чисел x и z одно равно 0, z - любое

$$\left\{\begin{array}{l}\left[\begin{array}{l}x=0\\ z=0\end{array}\right.\\ y=0\end{array}\right.$$

Если $y\neq 0$, $3x+2z=0$, то $3x=-2z$.

в (3): $xy+yz=-y \mid \cdot\frac{1}{y}$

$x+z=-1$.

$$\begin{cases} x=-1-z=-(1+z)\\ x=-2z:3\end{cases} \Rightarrow -3(1+z)=-2z.$$

$$-3-3z=-2z.$$

$$-3=-2z+3z.\quad z=-3$$

$$x=-(1+z)=-(1-3)=-(-2)=2.$$

$x=2$.

Подставим в (1): $3\cdot 2y-5\cdot(-3)y-(-3)\cdot 2=3y$

$$6y+15y+6=3y$$

$$21y-3y=-6$$

$$18y=-6$$

$$\boxed{y=-\frac{1}{3}}.$$

Подставим все значения в (2) и убедимся, что всё выполняется:

$$-5\cdot 2\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)+4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)(-3)+2\cdot(-3)=-4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)$$

$$\frac{10}{3}+4-6=\frac{4}{3};\qquad \frac{10}{3}-\frac{4}{3}=2$$

$$\frac{10-4}{3}=2 \qquad 6=6,\ \text{т. верно.}$$

$x=2$, $y=-\frac{1}{3}$, $z=-3$ или ($y=0$, $x=0$ или $z=0$).

или ответ в виде координат:

$(2;-\frac{1}{3};-3)$; $(0;0;z)$; $\{x;0;0\}$

Ответ: $$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=2\\ y=-\frac{1}{3}\\ z=-3\end{cases}\\ \left\{\begin{array}{l}y=0\\ \left[\begin{array}{l}x=0\\ z=0\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Место для скобы

Шифр 004511

№3

Для $f(x)$ известно: $f(0)+f(1)=0$; $f(2)+f(3)=0$.
Чему равна сумма корней ур-я $f(x)=2020$? $f(x)$ - квадр. трехчлен.

Решение.

Т.к. $f(x)$ - кв. 3х член, то пусть $f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$.

Тогда: $f(0)=0+0+c=c$; $f(1)=a+b+c$; $f(2)=4a+2b+c$; $f(3)=9a+3b+c$.

По условию: $c+a+b+c=0$; $4a+2b+c+9a+3b+c=0$.

Тогда: $\begin{cases} c=-a-b-c \\ 4a+2b+c=-9a-3b-c \end{cases}$ => подставим (1) в (2): $4a+2b-a-b-\cancel{c}=-9a-3b-\cancel{c}$;

$4a-a+2b-b=-(9a+3b)$; $3a+b=-3(3a+b)$ => $3a+b=0$, $a=-\frac{b}{3}$.

Рассмотрим ур-е $f(x)=2022$.

$ax^2+bx+c=2022$.

$ax^2+bx+(c-2022)=0$.

Если этот трехчлен имеет корни x_1 и x_2, то по теореме Виета $x_1\cdot x_2=\frac{c-2022}{a}$, $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$.

Т.К. $a=-\frac{b}{3}$, то $\frac{-b}{a}=\frac{-b}{-b}\cdot 3=3$, т.е. $\boxed{x_1+x_2=3}$

Ответ: сумма корней ур-я $f(x)=2022$ равна 3.

№4

Доказать: $\sqrt[2020]{2019\cdot 2020^{-1}}+\sqrt[2020]{2020\cdot 2017^{-1}}>2$.

$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2$

$1+\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right)+1+\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right)>2$.

$-\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right)-\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right)>0$

$\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right)+\left(1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right)<0$.

$1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}<\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}-1$.

Т.К. $\frac{2019}{2020}<1$, то $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}<1$, => $1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}>0$ => $\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right|=1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}$.

также $\frac{2020}{2017}>1$, $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>1$, => $1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}<0$ => $\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right|=\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}-1$.

=> $\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right|<\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right|$.

Т.К. $\frac{2019}{2020}<\frac{2020}{2017}$, то $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}<\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$, => число $\frac{2019}{2020}$ ближе к единице, чем число $\frac{2020}{2017}$

$\left|1-\frac{2019}{2020}\right|=\frac{1}{2020}$; $\left|1-\frac{2020}{2017}\right|=\left|\frac{2017}{2017}-\frac{2020}{2017}\right|=\left|-\frac{3}{2017}\right|=\frac{3}{2017}$, очевидно, что $\frac{3}{2017}>\frac{1}{2020}$ =>

=> для $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}$ и $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$ сохраняется, т.е. действительно $\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}\right|<\left|1-\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}\right|$,

=> $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}>2$, что треб. док.

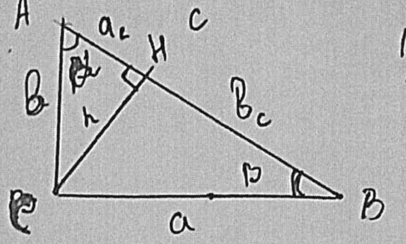
Место для скобы

Шифр

№5 В п/у △ со сторонами a, b и c (c - гипотенуза) провели высоту h к c. Возможно ли, что $c+h<a+b$?

Решение.

Предположим, что действительно $c+h<a+b$



1) По св. п/у △ $hc=ab$
(можно получить из подобия $\triangle ACH$ и $\triangle BCH$ и $\triangle ABC$, или из определения $\sin\alpha$: $\sin\alpha=\frac{h}{a}$ и $\sin\alpha=\frac{b}{c}$ => $h\cdot c=ab$.
Тогда $h=\frac{ab}{c}$.

2) По теореме Пифагора для $\triangle ABC$: $c^2=a^2+b^2$ => $c=\sqrt{a^2+b^2}$ =>
=> $h=\frac{ab}{c}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

3) Тогда: $c+h<a+b$ => $\sqrt{a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}<a+b$.

Рассмотрим выражение $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\frac{1}{4}ab}{\frac{1}{4}\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{\frac{1}{4}\sqrt{ab}\cdot\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}=\frac{1}{4}\sqrt{ab}\,\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}}\leq 1\cdot\frac{1}{4}\sqrt{ab}$

(используя неравенство о средних (неравенство Коши):
для $\forall$ a и b: $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, равенство достигается при $a=b$).

сред. квадрат. — сред. арифм. — сред. геометр.

Тогда: $\sqrt{a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}<a+b$, т.к. $\cancel{\sqrt{ab}}\ \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\leq\frac{1}{4}ab$, то

$\sqrt{a^2+b^2}+\frac{1}{4}\sqrt{a+b}<a+b$ тоже верно.

$\sqrt{a^2+b^2}<(a+b)-\frac{1}{4}\sqrt{ab}\quad |:2$

$\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}<\frac{a+b}{2}-\frac{1}{8}\sqrt{ab}\quad |:2$

$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{4}}<\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}-\frac{1}{16}\sqrt{ab}$

т.к. по тому же неравенству о средних $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{a+b}{2}$, то
невозможно $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}<\frac{a+b}{2}$, т.е. $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}$ => $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\geq\frac{1}{2}\frac{a+b}{2}-\frac{\sqrt{ab}}{16}$.

=> знак поменялся и первоначальное предположение не верно, получается, что для любых длин отрезков a, b, c и h верно: $c+h\geq a+b$.

Ответ: невозможно.