ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004536

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 9 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	9
4.	Фамилия	ТРОФИМОВ
	Имя	АЛЕКСЕЙ
	Отчество	ДМИТРИЕВИЧ
5.	Дата рождения	22 (число) 08 (месяц) 2006 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Севастополь
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Севастополь
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ ЦДО «Малая академия наук» г.Севастополь; ГБОУ СОШ № 19

1	2	3	4	5	Σ
7	7	7	5	–	26

Место для скобы

Шифр 004536

Задача 1

$$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}=\frac{2(a^3+b^3)ab}{a^2-ab+b^2}=\frac{2(a+b)\cancel{(b^2-ab+b^2)}ab}{\cancel{a^2-ab+b^3}}=2(a+b)ab$$

$$-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}=\frac{(a^4-b^4)(b+a)}{(a^2-b^2)}$$; занесли минус в скобку (b^4-a^4).

$$\frac{(a^4-b^4)(b+a)}{a^2-b^2}=\frac{\cancel{(a-b)}(a^3+a^2b+ab^2+b^3)\cancel{(a+b)}}{\cancel{(a-b)(a+b)}}=$$

$$=a^3+a^2b+ab^2+b^3$$

$$\frac{2(a^4b+ab^4)}{a^2-ab+b^2}-\frac{(b^4-a^4)(b+a)}{a^2-b^2}=2(a+b)ab+a^3+a^2b+ab^2+b^3=$$

$$=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$

$$a+b=\begin{array}{r} 2,444\ldots4444 \\ +\ 1,555\ldots5556 \\ \hline 4000\ldots00000 \end{array}$$; т.к. каждый раз в следующий разряд переходит 1, то везде будет 0;

$$a+b=-4\Rightarrow(a+b)^3=(-4)^3=-64$$

Ответ: −64

Место для скобы

Шифр 004536

Задача 2

$$\begin{cases} x^2+2y^2-2yz=625 \\ 2xy-z^2=625 \end{cases}$$; вычтем из первого второе.

$x^2+2y^2-2yz-2xy+z^2=0$; сгруппируем:

$(x^2-2xy+y^2)+(z^2-2yz+y^2)=0$

$(x-y)^2+(z-y)^2=0$; сумма квадратов равна 0, если только все квадраты равны 0; $x-y=0$; $z-y=0 \Rightarrow x=y=z$; подставляем $x=y=z$ во второе равенство, заменяя всё на x:

$2xy-z^2=2x^2-x^2=625$

$x^2=625 \Rightarrow x=\pm\sqrt{625}=\pm 25$; и получается две тройки чисел: $x=y=z=25$ и $x=y=z=-25$

Ответ: $(25;25;25)$ и $(-25;-25;-25)$

Место для скобы

Шифр 004536

Задача 3

x^2+ax+b и x^2+cx+d имеют общую точку при $x=1$, значит:

$1+a\cancel{x}+b=1+c+d=1$

$1+a+b=1 \Rightarrow a+b=0 \Rightarrow a=-b$

$1+c+d=1 \Rightarrow c+d=0$; $c=-d$, докажем равенство $c^{2022}-b^{2021}=a^{2021}+d^{2022}$.

$c^{2022}=d^{2022}$, т.к. $c=-d$ и 2022 - чётная степень; $-b^{2021}=a^{2021}$, т.к. $-b=a$ и 2021 - нечётная степень $\Rightarrow c^{2022}-b^{2021}=a^{2021}+d^{2022}$ и невозможно, что $c^{2022}-b^{2021}<a^{2021}+d^{2022}$.

Ответ: нет

Место для скобы

Шифр

Задача 4

$a^4 - b^2ac + c^4 \geq a^2bc - b^4 + c^2ab$

$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a+b+c)$; если перенести и сгруппировать.

по неравенству Коши???

$\frac{a^3+b^3+c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3} = abc \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{a^3+b^3+c^3(a+b+c)}{3}$ ~~поэт~~ $\geq abc(a+b+c)$, т.к.

мы используем неравенство Коши для положительных чисел, то потом надо будет доказать если 1 или 2 числа отрицательны, т.к. если все отрицательны, то подставив в исходное неравенство выйдет тоже самое, что и с положительными. Доказав, что

$a^4+b^4+c^4 \geq \frac{a^3+b^3+c^3(a+b+c)}{3}$; мы докажем, что

$a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$,

$3a^4+3b^4+3c^4 \geq a^3+b^3+c^3(a+b+c)$; раскроем скобки:

$3a^4+3b^4+3c^4 \geq a^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^4+b^3c+c^3a+c^3b+c^4$;

перенесём $a^4+b^4+c^4$ с правой части влево:

Место для скобы

Шифр

$2a^4+2b^4+2c^4 \geq a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$;

~~сгру~~ перенесём влево и сгруппируем вот так:

$(a^4+c^4-a^3c-ac^3)+(b^4+c^4-b^3c-c^3b)+(a^4+b^4-a^3b-b^3a) \geq 0$;

Докажем, что каждая скобка ≥ 0, для этого надо доказать, что хотя бы одна ≥ 0 и другие будут доказываться по аналогии.

Докажем, что $a^4+c^4-a^3c-ac^3 \geq 0$; после долгих группировок, окажется, что $a^4+c^4-a^3c-ac^3 = (a^2+ac+c^2)(a-c)^2$; $(a-c)^2 \geq 0$; докажем, что $a^2+ac+c^2 \geq 0$; $a^2+ac+c^2=(a+0{,}5c)^2+0{,}75c^2$, что $\geq 0 \Rightarrow a^2+ac+c^2 \geq 0$; значит $a^4+c^4-a^3c-ac^3 \geq 0$;

по аналогии все 3 подобных скобки ≥ 0;

значит мы доказали $a^4-b^2ac+c^4 \geq a^2bc-b^4+c^2ab$ в случае 3 отриц. или 3 полож. чисел a, b, c;

в случае 2 или 1 отриц. числа будет легче доказать, т.к. хотя бы одна из скобок ~~буд~~ $-a^2bc$; $-b^2ac$; $-c^2ab$ будет положительна, и считая, что мы доказали ранее, то слева в неравенств $a^4+b^4+c^4 \geq abc(a+b+c)$ число даже больше, а справа меньше, значит в этих случаях всё доказано.