ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004470

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Т О Р О П И Н
	Имя	И В А Н
	Отчество	П А В Л О В И Ч
5.	Дата рождения	24 (число) 11 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ школа №827

004470

№1.

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}, \quad x - \frac{1}{x}, \quad \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$$

Найти x, чтобы все 3 числа были целыми

Во-первых заметим, что 1 и 3 число это одинаковые числа, только с разными знаками. Значит, достаточно проверить условия 2 и 3

Вычитая одно целое из другого целого получим целое

$$x - \frac{1}{x^2+2021} \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x^3+2021x-1}{x^2+2021}$$

mod 7

	x	x^2	x^3
1)	0	0	0
2)	1	1	1
3)	2	4	1
4)	3	2	-1
5)	4	2	1
6)	5	3	1
7)	6	1	-1

$2021 \equiv_7 5$

$2021 : 7 = 288$, остаток 5

1) $\frac{0+5\cdot 0-1}{0+5}$

2) $\frac{1+5\cdot 1-1}{1+5}$

3) $\frac{-1+5\cdot 2-1}{5+2}$ ... $\frac{1+5\cdot 3-1}{5+2}$

4) $\frac{1+5\cdot 24-1}{5+2} = \frac{20}{4}$

5) $\frac{1+5\cdot 5-1}{3+5} = \frac{25}{8}$

6) $\frac{-1+6\cdot 5-1}{1+5} = \frac{28}{1}$

7) $\frac{1+5\cdot 2-1}{4+5} = \frac{10}{9}$

Смотрю числитель и знаменатель по mod 7, они дают разные остатки, значит делить друг на друга

Из расчетов, произведенных справа получаем, что числитель и знаменатель никогда не дадут одинаковые остатки при делении на 7, значит $x - \frac{1}{x^2+2021}$ никогда не будет целым, а значит и другие. Отсюда можем сделать вывод, что таких x нет

$\boxed{\text{Ответ: нет}}$

7б

Итого: 20б

1	2	3	4	5
7	7	5	1	0

№2 Числовик

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020\sin^9 2x = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020\cos^9 4x$

004470

Введем ф-ю $f(a) = a + a^5 + 2020a^9$

$f'(a) = 1 + 5a^4 + 2020 \cdot 9a^8$

Заметим, что $f'(a) > 0$, т.е. ф-я монотонна (возрастает) на $D(a)$, т.е. для исходного уравнения имеем

$f(\sin 2x) = f(\cos 4x)$

~~Как~~ Если ф-я монотонна, то равенство достигается при равенстве аргументов

$\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x \quad \sin 2x = t$

$2t^2 + t - 1 = 0$

$t = -1 \quad t = \frac{1}{2}$

$\sin 2x = -1 \quad \sin 2x = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n \; n \in Z \quad 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \; k \in Z \quad 2x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi l \; l \in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi n \quad x = \frac{\pi}{12} + \pi k \quad x = \frac{5\pi}{12} + \pi l$

7 б

№3.

004470

~~Согласно теореме Виета произведение корней p(t) будет равно 3, а их сумма~~

$t^n + 5t^{n-1} + 3$ – представимо в виде произведения 2 многочленов с целыми коэфами

Что это означает? То, что если уравнение и имеет корни, то они будут целыми.

Зная тот факт, что их можно найти как делители свободного члена, найдем делители свободного члена; это будут потенциальные корни

$1; -1; 3; -3; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0$ (также множители 2 исходных старш. многочл.)

1) $t=1$

$1^n + 5 \cdot 1^{(n-1)} + 3 = 0$

неверно при $\forall n$

2) -1 $t=-1$

$(-1)^n + 5 \cdot (-1)^{n-1} + 3 = 0$

n четное: $1 + (-5) + 3 \neq 0$ неверно

n нечетно $-1 + 5 + 3 \neq 0$ неверно

6) $0 + 0 + 3 \neq 0$

Непост. обосноы.

5б

3) $t = 3$

$(3)^n + 5(3)^{n-1} + 3 = 0$

$3^n = a$

$a + \frac{5a}{3} + 3 = 0$

$3a + 5a + 9 = 0$

$8a + 9 = 0$

$8 \cdot 3^n + 9 = 0$

неверно

4) $t = -3$

$(-3)^n + 5(-3)^{n-1} + 3 = 0$

$b = (-3)^n$

$b + \frac{5b}{3} + 3 = 0$

$3b - 5b + 3 = 0$

$2b = 3$

$(-3)^n = \frac{3}{2}$

уравнение не имеет целых решений

5) $t = \frac{1}{3}$

$\left(\frac{1}{3}\right)^n + 5\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1/3} + 3 = 0$

$16\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

6) $t = -\frac{1}{3}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 15\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3 = 0$

$14\left(\frac{1}{3}\right)^n = 3$ $\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{14}$

не имеет целых n

Итак, мы не можем представить P(t) как произведение многочленов с целыми коэфами

Ответ: нельзя

№4. Перефразирование задачи
$m>0$ и $x>0$

$$\frac{x^3}{m+2020^{4/3}x} = \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+2020^{4/3}x} - \frac{2020^{4/3}x}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+2020^{4/3}x} + \frac{m}{x^3+2020^{4/3}x} + \frac{2020^{4/3}x}{m+x^3} \le \frac{3}{2}$$

Н-во о средних для 3 слаг.

$$3\sqrt[3]{\frac{x^3 \cdot m \cdot 2020^{4/3}x}{(m+2020^{4/3}x)(x^3+2020^{4/3}x)(m+x^3)}} \le \frac{3}{2}$$ Обозначим $2020^{4/3}=a$

$$\frac{x^3ma}{(m+ax)(x^2+a)(m+x^3)} \le \frac{1}{8}$$

$$8x^3ma \le (m+ax)(x^2+a)(m+x^3)$$

$$(mx^2+ax^3+ma+a^2x)(m+x^3)$$

$$8x^3ma \le m^2x^2+max^3+m^2a+ma^2x+mx^5+ax^6+max^3+a^2x^4$$

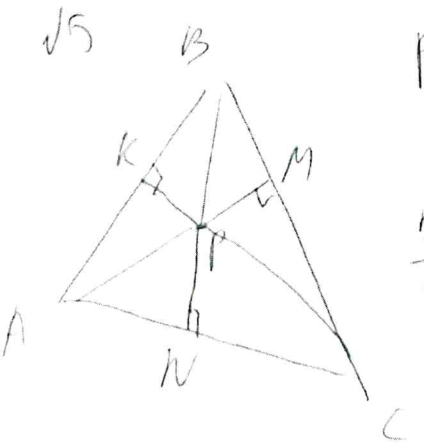
$$6max^3 \le m^2x^2 + \cancel{max^3} + m^2a + ma^2x + mx^5 + ax^6 + \cancel{max^3} + a^2x^4$$

$mx \cdot mx$ $ma \cdot a$ $ma \cdot ax$ $mx^3 \cdot x^2$ $ax^3 \cdot x^3$ $ax^3 \cdot ax$

~~Преобразовать~~ Выразить x через m, но мне непонятно
Или выделить полные квадраты
Транснеравенство?

1б

№5



$$PM \cdot BC + \underline{PN} \cdot AC + AB \cdot PK = \frac{S}{2} = const$$

$$\frac{BC}{PM} + \frac{AC}{PN} + \frac{AB}{PK} \to \min$$

0 б