ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

07288

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

мет	МАТЕМАТИКА
ант	1
:	9
лия	ТИМОФЕЕВА
	ЕКАТЕРИНА
ство	НИКОЛАЕВНА
рождения	11 (Число) 08 (Месяц) 2007 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Красноярский край
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, рово, Псков)*	Красноярск
е наименование овательного учреждения, ором Вы обучаетесь в е время	МАОУ Гимназия №13 "Академ"

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Тим

Шифр 07288

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28		Емельянова	Ему

1	2	3	4	5	Σ
2	7	6	6	7	28

Задача №2

У нас ряд $x_n = 1 + 2^n + 3^n + 4^n + 5^n$. Нужно док-ть, что это число $\vdots$ 2025, чтобы это было так, на конце числа должна быть 5 ~~или~~ или 0. Можно доказать, что это не так. Составим таблицу из последних цифр степеней 2, 3, 4, 5. Они цикличны.

x	2	3	4	5	
x^2	4	9	6	5	$\Rightarrow 24 + 1 = 2\boxed{5}$
x^3	8	7	4	5	$= \boxed{4} + 1 = \boxed{5}$
x^4	6	1	6	5	$= \boxed{8} + 1 \ \boxed{9}$
x^6	2	3	4	5	$= \boxed{4} + 1 = \boxed{5}$
x^6	4	9			
и т.д.		9			

Сложим концы и +1. Суммы также цикличны. Последняя цифра на конце суммы также циклична.

Т.е цифры на концах членов последовательности входят в цикл 5, 5, 5, 9

→ Т.е мы не можем подобрать 5 последовательных членов, которые делятся на 2025

Ответ: Нет, нельзя

Задача №3

$(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 \leq 3(a + b + c)$

Пусть $\sqrt{a}$ будет a, тогда $a = a^2$

Т.е $(a + b + c)^2 \leq 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$

скобы

Шифр 07288

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc-3a^2-3b^2-3c^2 \le 0$

$-2a^2-2b^2-2c^2+2ab+2ac+2bc \le 0$

$2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2ac+2bc$ | Сокращаем в 2 раза

$a^2+b^2+c^2 \ge ab+ac+bc$

Мы работаем с неотрицательными числами. Значит меньшее число (у нас это a) (от перестановки слагаемых ничего не меняется, так что все равно какое меньшее 2-ое, 3-е или 1-ое, мы можем подставить вместо него a).

Мы можем записать так: $b=a+r$

$c=a+m$, где r и m - неотрицательные числа. Тогда

$a^2+(a+r)^2+(a+m)^2 \ge a(a+r)+a(a+m)+(a+r)(a+m)$

$3a^2+2ar+r^2+2am+m^2 \ge 3a^2+ar+am+mr$ | $-3a^2$

$2ar+r^2+2am+m^2 \ge ar+am+mr$

$r^2-mr+m^2 \ge ar+am-2ar-2am$

$(r-m)^2+mr \ge -2ar-2am$ преобразовано неверно

Т.к. $(r-m)^2 \ge 0$ и a, r и m - неотрицательные числа. Теорема (Неравенство доказано).

Задача 4

x^2+p_1x+1 x^2+p_2x+1

Корни Корни x_3 и x_4.

x_1 и x_2 Обозначим их как c и d соответственно

Мы обозначим

Обозначим их как a и b соответственно. (в первом)

По теореме Виета:

$x_1 + x_2 (a+b) = p_1$ $c+d = p_2$

$ab = 1$ $cd = 1$

Наше неравенство:

$(a-c)(b-c)(a+d)(b+d) = p_2^2 - p_1^2$

$p_2^2 - p_1^2 = (c+d)^2 - (a+b)^2 = c^2 + 2cd + d^2 - a^2 - 2ab - b^2$

$(a-c)(a+d)(b-c)(b+d) = (a^2 + ad - ac - cd)(b^2 + bd - cb - cd) = a^2b^2 + a^2bd - a^2cb - a^2cd + ab^2d + abd^2 - abcd - acd^2 - ab^2c - abcd - ac^2b + ac^2d - cb^2d - cbd^2 + c^2bd + c^2d^2.$

Подставим в обе получившиеся части вместо ab и cd 1 (по теореме Виета)

В обеих частях получаем:

$c^2 + 2 + d^2 - a^2 - 2 - b^2 = c^2 + d^2 - a^2 - b^2$

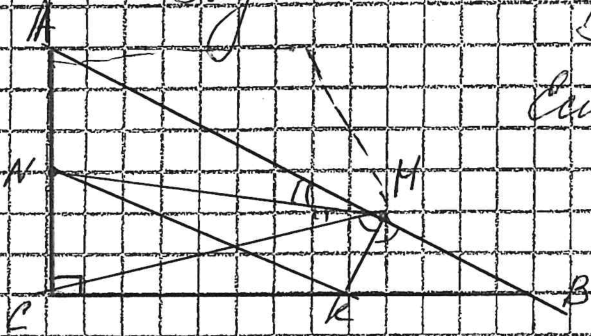
В первой части: $-a^2 + d^2 - c^2 + b^2$

Доказано

место для скобы

Шифр 7288

Задача №5



Нам нужно доказать, что если $MC = MK$, то $AM = AB$

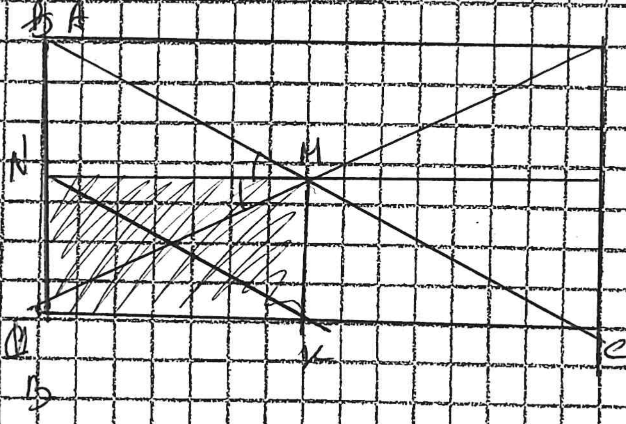
Докажем, что $NMKC$ - прямоугольник

Пусть $\angle CMK \to \varphi$ $\angle NMC \to \alpha$ $\alpha + \varphi = 90$

По стороне AB $\alpha \angle NMC + \alpha \angle CMB = 180$ $\angle NMC + \angle CMB = 90°$

Исходя из правила о внешнем угле, можно точно сказать, что $\angle NMC = \varphi$ $\angle CMK = \alpha$

Т.к. $NCKM$ - маленький прямоугольник, отразив NK, а затем отразив MK + сторона отраженного прямоугольника, должен получиться больший прямоугольник, составленный из четырех маленьких. Если CM - не середина, то такое не получается. Если середина, то получается и в большом прямоугольнике CM - часть диагонали



скобы

Шифр 4288

Задача №1

$2y^2 + xy - x^2 + 2y + 7x - 84 = 0$

Мы можем разбить большой многочлен на несколько многочленов, сложив которые мы получим прежний большой. Все $\exists$ $\forall x$ значения должны быть равны нулю, т.к только сумма (если мы работаем с натуральными числами) равна 0.

$2y^2 + 2y = 0$ $\quad -x^2 + 7x = 0$ $\quad 84 = 0$ $\quad -xy = 0$

Корни: $\quad x = 0$ и $x = 7$ $\quad \varnothing$ $\quad x = 0$ и $y = 0$

$y = 0$ и $y = 1$

У нас осталась только точка (0 и 0)

Можно еще посмотреть, чтобы их сумма равнялась нулю, т.е одно отрицательное + одно положительное.

Но у меня не осталось времени