Место для скобы

003737

**Шифр**

# ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

## ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
**заключительного этапа**

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Предмет | математика |
| 2. | Вариант | 1 |
| 3. | Класс | 11 1 |
| 4. | Фамилия | ТИХОНОВА |
| | Имя | АНАСТАСИЯ |
| | Отчество | АНДРЕЕВНА |
| 5. | Дата рождения | Число: 22; Месяц: 12; Год: 2002 |
| 6. | Страна | РОССИЯ |
| 7. | Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)* | НОВОСИБИРСКАЯ ОБЛАСТЬ |
| 8. | Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)* | город |
| 9. | Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)* | Карасук |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь | МБОУ технический лицей №176 Карасукского района Новосибирской области |

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись*

Место для скобы

**Шифр** 003737

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 20 | 1.04.21 | Корякина Е.Е. | [signature] |

№1

1) $x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x}$ $(x\neq 0,\ x=\pm 1)$ ?

Только при $x=\pm 1$ II-е число $(x-\frac{1}{x})$ может быть целым.

2) I-е число $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}\right)$ и III-е число $\left(\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}\right)$ - противоположные, т.е. одинаковые по значению, но различные по знаку.

Подставим $x=1$ в I, II и III числа:

I: $\frac{1}{1}-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$ - не целое

II: $1-1=0$ - целое

III: $\frac{1}{2022}-\frac{1}{1}=-\frac{2021}{2022}$ - не целое

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Σ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 7 | 7 | 2 | 2 | 20 |

Подставим $x=-1$ в I, II и III числа:

I: $-\frac{1}{1}-\frac{1}{2022}=-\frac{2023}{2022}$ - не целое

II: $-1+1=0$ - целое

III: $\frac{1}{2022}+\frac{1}{1}=\frac{2023}{2022}$ - не целое

Из 3-х чисел в обоих возможных случаях только 1 число целое, следовательно, не существует такого значения $x$, при котором все 3 числа целые.

Ответ: не существует.

№2

$\sin x+\sin^3 x+2020\cdot\sin^5 x=\cos 2x+\cos^3 2x+2020\cdot\cos^5 2x$

Пусть $\sin x=a$, $\cos 2x=b$, тогда:

$f(a)=a+a^3+2020\cdot a^5$

$f(b)=b+b^3+2020\cdot b^5$

Найдем производные от $f(a)$ и $f(b)$:

$f'(a)=1+3\underset{\geq 0}{a^2}+2020\cdot 5\cdot \underset{\geq 0}{a^4}$

$f'(b)=1+3\underset{\geq 0}{b^2}+2020\cdot 5\cdot \underset{\geq 0}{b^4}$ - функции монотонно возрастают $\Rightarrow f(a)=f(b)\Rightarrow$ $\Rightarrow f(\sin x)=f(\cos 2x)$

$\sin x=\cos 2x$

Воспользуемся формулой понижения: $1-\cos 2x=2\sin^2 x\Rightarrow \cos 2x=1-2\sin^2 x$

$\sin x=1-2\sin^2 x$

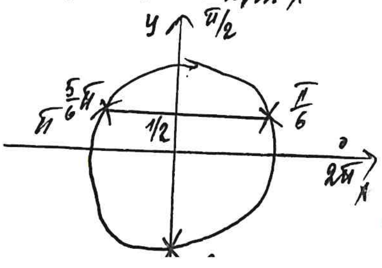
$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

Произведем замену $\sin x=t$, причем $-1\leq t\leq 1$:

$2t^2+t-1=0$

$D=1-4\cdot 2(-1)=9$

$t_{1,2}=\frac{-1\pm 3}{4}$




$\left[\begin{array}{l} t_1=1/2 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}\sin x=1/2\end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l}x=\frac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in Z\end{array}\right.$

Место для скобы

Шифр 003737

№3

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ $\qquad \begin{cases} n > 1 \\ n \in Z \end{cases}$

Решениями в целых числах $f(x)$ являются делители свободного члена $(3)$

1сл. $n$-четное

а) $x = 1$ $\qquad$ 1 в любой степени равен 1.

$f(1) = 1 + 5 + 3 \neq 0$

б) $x = -1$ $\qquad$ $(-1)$ в четной степени равен 1

$f(-1) = 1 - 5 + 3 \neq 0$

в) $x = 3$

$f(3) = 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 > 0$

г) $x = -3$

$f(-3) = (-3)^n + 5 \cdot (-3)^{n-1} + 3 = 0$

$(-3)^n + 5 \frac{(-3)^n}{(-3)} + 3 = 0$

$(-3)^n - 5 \cdot \frac{(-3)^n}{3} + 3 = 0 \,|\cdot 3$

$3(-3)^n - 5(-3)^n + 9 = 0$

$2(-3)^n = 9$

$(-3)^n = \frac{9}{2}$ – нет решений в целых числах

2сл. $n$-нечетное

а) $x = 1$

$f(1) = 1 + 5 + 3 > 0$

б) $x = -1$ $\qquad$ $(-1)$ в нечетной степени равен $(-1)$

$f(-1) = -1 + 5 + 3 \neq 0$

в) $x = 3$

$f(3) = 3^n + 5 \cdot 3^{n-1} + 3 > 0$

г) $x = -3$

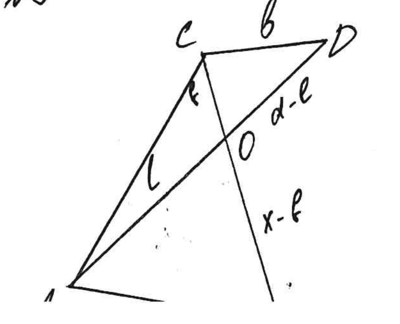
$f(-3) = (-3)^n + 5 \cdot (-3)^{n-1} + 3 = 0$

$(-3)^n + 5 \frac{(-3)^n}{(-3)} + 3 = 0$

$(-3)^n = \frac{9}{2}$ – нет решений в целых числах

Ответ: $f(x)$ нельзя представить в виде произведения многочленов положительной степени с целыми коэффициентами, т.к. ни при одном возможном значении $x$ $f(x)$ не обращается в ноль.

№5




Дано:

$ABCD$ - выпуклый 4-к

$S_{ABCD} = 32$

$AB + CD + AD = 16$

$BC$ - ?

Место для скобы

Шифр 003737

№5 (продолж.)

Пусть $AB=a$, $CD=b$, $AD=d$, $BC=x$, $CO=f$, $AO=l$, $OD=d-l$, $OB=x-f$

По условию: $a+b+d=16$

$\triangle COD$: по неравенству треугольника: $CO+OD>CD$; $f+d-l>b$ (1)

$\triangle AOB$: аналогично $AO+OB>AB$; $l+x-f>a$ (2)

Сложим (1) и (2):

$d+x>a+b \quad |+d>0$

$2d+x>a+b+d$

$2d+x>16$

$2d>16-x$

$x>16-2d>0$

$d<8 \Rightarrow x<16$

$S_{ABCD}=\frac{1}{2}\cdot AD\cdot BC\cdot \sin\alpha=\frac{1}{2}\cdot d\cdot x\cdot \sin\alpha=32$

$0<\sin\alpha\le 1$

$\begin{cases} dx\ge 64 \ (3) \\ 8>d \ (4)\end{cases}$

Объединим (3) и (4):

$8dx>64d$

$\begin{cases} x\ge 8 \\ x<16\end{cases}$

Ответ: $BC\in[8;16)$

F

№4

$$\frac{x^3}{a+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}+\frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{a+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})}\qquad\begin{cases} a>0 \\ x>0\end{cases}$$

Пусть $\sqrt[3]{2020^4}=r$: $\frac{x^3}{a+rx}+\frac{rx}{a+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{x^3+rx}$

Рассмотрим 2 случая:

1 сл. — $x^2\ge r \quad |\cdot x>0$

$x^3\ge rx \quad |+a>0$

$x^3+a\ge rx+a$ (1)

Подставим (1) в первую дробь:

$\frac{x^3}{x^3+a}+\frac{rx}{a+x^3}\le\frac{3}{2}-\frac{a}{x^3+rx}$

$\frac{x^3+rx}{x^3+a}+\frac{a}{x^3+rx}\le\frac{3}{2} \quad |+\frac{x^3}{x^3+rx}$

$\frac{x^3+rx}{x^3+a}+\frac{a+x^3}{x^3+rx}\le\frac{3}{2}+\frac{x^3}{x^3+rx}$

Применим известное свойство неравенства: $b+\frac{1}{b}\ge 2$

$2-\frac{3}{2}\le\frac{x^3}{x^3+rx}$

$\frac{x^3}{x^3+rx}\ge\frac{1}{2}$

Место для скобы

Шифр

№4 (продолж.)

$2x^3 \geq x^3 + rx$

$x^3 \geq rx$

$x^2 \geq r$, т.е. $\forall a$ подходит

2 сл. - $x^2 < r$ $| \cdot x > 0$

$x^3 < rx$ $| + a$

$x^3 + a < rx + a$ (2)

Подставим (2) во вторую дробь:

$$\frac{x^3}{a+rx} + \frac{rx}{rx+a} \leq \frac{3}{2} - \frac{a}{x^3+rx}$$

$$\frac{x^3+rx}{a+rx} + \frac{a}{x^3+rx} \leq \frac{3}{2} \quad | + \frac{rx}{x^3+rx}$$

$$\frac{x^3+rx}{a+rx} + \frac{a+rx}{x^3+rx} \leq \frac{3}{2} + \frac{rx}{x^3+rx}$$

Применим снова известное свойство неравенства:

$$2 - \frac{3}{2} \leq \frac{rx}{x^3+rx}$$

$$\frac{rx}{x^3+rx} \geq \frac{1}{2}$$

$2rx \geq x^3 + rx$

$rx \geq x^3$

$r \geq x^2$

$x^2 \leq r$, т.е. $\forall a$ является решением.

Ответ: $a \in (0; +\infty)$

X