ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004512

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	Т Е Й М У Р О В
	Имя	З А И Р
	Отчество	З А К И Р О Г Л Ы
5.	Дата рождения	06 (число) 09 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	г Москва
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Москва
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ГБОУ Школа №171

1	2	3	4	5	Σ
4	5	7	6	3	25

Место для скобы

Шифр 004512

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

Место для скобы

Шифр 004512

1. $\exists ?\ x: (\sqrt{x^2+2020}-x)\in\mathbb{Z}$, $(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020})\in\mathbb{Z}$, $(2x-\sqrt{x^2+2020})\in\mathbb{Z}$.

Ответ: $\nexists$.

Очевидно, что $x\in\mathbb{Z}$ (если сложить 1 число и ~~второе,~~ третье, то получится целое число, которое $=x$: $\sqrt{x^2+2020}-x+2x-\sqrt{x^2+2020}=x$). Тогда $\sqrt{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$. Значит, $x^2+2020=x^2\pm 2k+k^2=(x\pm k)^2$, где $k\in\mathbb{Z}$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2k+k^2=2020 \\ -2k+k^2=2020 \end{array}\right.$ $(\Leftrightarrow)$

$(\Leftrightarrow)\left[\begin{array}{l} k(2+k)=2020 \\ k(k-2)=2020 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ число 2020 должно ~~стать~~ ~~делиться отличающиеся на 2, но 2020 = 4·5·101~~ раскладываться на 2 множителя (целых), произведение которых даёт 2020, однако какие бы мы не взяли $2020=4\cdot5\cdot101$ и какие бы мы не взяли множителей, комбинации ~~у нас не получится~~, то не ~~получится~~ найдутся такие 2 множителя, произведение которых даёт 2020 ◀

2. $\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y & (1) \\ -5xy+4yz+xz=-4y & (2) \\ xy+yz=-y & (3) \end{cases}$

Ответ: $x=2,\ y=-\frac{1}{3},\ z=-3$; $x=0,\ y=0,\ z=0$

Решение:

~~(1) + (2): −2xy − yz = −y~~

Рассмотрим случай, когда $y=0$: если $y=0$, то ~~тогда (3) y... если~~ система имеет вид:

$\begin{cases} -xz=0 \\ xz=0 \end{cases}$ $(\Leftrightarrow)$ $x=z=0$

Место для скобы

Шифр 104512

Теперь пусть $y \neq 0$, тогда

Сложим первые два ур-я $(1)+(2)$:

$$\underline{3xy} - \underline{\underline{5yz}} - \underline{\underline{\underline{xz}}} - \underline{5xy} + \underline{\underline{4yz}} + \underline{\underline{\underline{xz}}} = -y \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow -2xy - yz = -y$, т.к. $y \neq 0$, то мы можем

4. поделить на $(-y)$:

$$2x + z = 1 \Leftrightarrow \boxed{z = 1 - 2x}$$

Поделим (3) ур-е на y (можно так сделать, т.к. $y \neq 0$): $z + x = -1 \Leftrightarrow \boxed{z = -1 - x}$

Итак мы получили ~~2 новых ур-я~~ новую систему ур-е с 2 неизвестными:

$$\begin{cases} z = 1 - 2x, \\ z = -1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ z = -3 \end{cases}$$

Подставим значения x и z в (1) ур-е и найдем значение y:

$$6y + 15y + 6 = 3y$$

$$18y = -6 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{3}$$

3. $f(x) = ax^2 + bx + c$, $f(0) + f(1) = 0$, $f(2) + f(3) = 0$

Сумма корней ур-я $f(x) = 2020$ − ?

Ответ: 3

Решение:

$$\begin{cases} f(0) + f(1) = \overset{f(1)}{(a + b + c)} + \overset{f(0)}{c} = a + b + 2c \quad (1) \\ f(2) + f(3) = \underset{f(2)}{(4a + 2b + c)} + \underset{f(3)}{(9a + 3b + c)} = 13a + 5b + 2c \quad (2) \end{cases}$$

Вычтем из (2) ур-я (1):

$$12a + 4b = 0 \Leftrightarrow \boxed{b = -3a}$$

Рассмотрим ур-е $f(x) = 2020$: $ax^2 + bx + c = 2020 \Leftrightarrow$

Место для скобы

Шифр

(г) $ax^2+bx+c-2020=0$.
По теореме Виета сумма корней $=$
$= -\frac{b}{a} = -\frac{-3a}{a} = \boxed{3}$.

4. $\sqrt[2020]{2019\cdot 2020^{-1}} + \sqrt[2020]{2020\cdot 2017^{-1}} \overset{?}{>} 2$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} \overset{?}{>} 2$$

Пусть $a = \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}$, а $b = \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}$, тогда воспользуемся неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим:

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}, \text{ т.е.}$$

$$\frac{\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}}}{2} > \sqrt{\sqrt[2020]{\frac{2019}{\cancel{2020}}\cdot\frac{\cancel{2020}}{2017}}}$$

$$\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} > 2\sqrt[4040]{\frac{2019}{2017}}$$

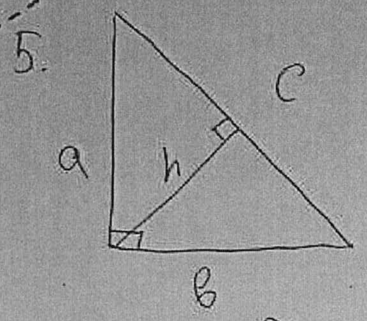
Очевидно, что $\sqrt[4040]{\frac{2019}{2017}} > 1$, т.к. можно возвести в 4040 степень и получить, что $\frac{2019}{2017} > 1 \Rightarrow \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} > 2$

ч.т.д.

Место для скобы

Шифр

5.



$c + h \overset{?}{<} a + b$

~~выводится~~

$S_\triangle = a \cdot b \cdot \frac{1}{2} = c \cdot \frac{1}{2} \cdot h$

$\Rightarrow \boxed{h = \frac{ab}{c}}$

$c + h \overset{?}{<} a + b \Leftrightarrow (c+h)^2 \overset{?}{<} (a+b)^2$

$(c+h)^2 \overset{?}{<} a^2 + 2ab + b^2$

(a, b, c – положительные)

$c^2 + 2hc + h^2 \overset{?}{<} a^2 + 2ab + b^2$

$c^2 + 2 \cdot \frac{ab}{c} \cdot c + \frac{a^2 b^2}{c^2} \overset{?}{<} c^2 + 2ab$ (по т. Пиф.)

$2ab + \frac{a^2 b^2}{c^2} \overset{?}{<} 2ab$

$\frac{a^2 b^2}{c^2} \overset{?}{<} 0,$

~~$\frac{c+h}{2} \overset{?}{<} \frac{a+b}{2}$~~

~~$\frac{c + \frac{ab}{c}}{2} \overset{?}{<} \frac{a+b}{2}$~~

~~$\frac{c + \frac{ab}{c}}{2} \geq \sqrt{c \cdot \frac{ab}{c}} = \sqrt{ab}$ (нер-во между ср. арифметическим и ср. геометрическим)~~

~~$\Rightarrow c + h \geq 2\sqrt{ab} \Leftrightarrow (c+h)^2 \geq 2ab$, но $(c+h)^2$~~

~~$\Rightarrow$ по условию задачи~~

а такое невозможно.

Ответ: Невозможно.

Место для скобы

Шифр

1. $\exists ?\ x: (\sqrt{x^2+2020}-x) \in \mathbb{Z}$, $(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}) \in \mathbb{Z}$, $(2x-\sqrt{x^2+2020}) \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\nexists$

Док-во

Очевидно, что $x \in \mathbb{Z}$ (если сложить 1 число и третье, то получится целое число, которое $= x$: $\sqrt{x^2+2020}-x+2x-\sqrt{x^2+2020}=x$) $\Rightarrow$ $\sqrt{x^2+2020} \in \mathbb{Z}$ $\Rightarrow x^2+2020 = t^2 \pm 2kt + k^2 = (t \pm k)^2$, где $t, k \in \mathbb{Z}$. Так как 2020 ~~⋮ 2, то пусть~~ ~~= 101 · 10, пусть~~ ~~2kt = 2020~~, тогда $kt = 1010$ ~~k = 10, t = 101 тогда~~ $\cancel{t^2+k^2} =$ не является полным квадратом и не равняется сумме двух квадратов, то ~~пусть~~ $2kt = 2020$

$\Rightarrow kt = 1010 = 101 \cdot 2 \cdot 5 \Rightarrow \begin{cases} k = 101 \\ t = 10 \end{cases}$ $\begin{cases} k = 2 \\ t = 505 \end{cases}$ $\begin{cases} k = 5 \\ t = 202 \end{cases}$ и все их перестановки

) но тогда $x^2 = k^2 + t^2$, но ни один из этих случаев не даёт $x = \sqrt{k^2+t^2}$ целое число

ч. т. д.