Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004010

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	2
3.	Класс	10
4.	Фамилия	СУШКОВ
	Имя	АРТЁМ
	Отчество	АЛЕКСАНДРОВИЧ
5.	Дата рождения	27 (Число) 03 (Месяц) 2004 (Год)
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	ТОМСКАЯ ОБЛ.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	ГОРОД
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	ТОМСК
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	ОГБОУ ТОМСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ЛИЦЕЙ

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

Место для скобы

Шифр 004010

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
35 б	5.04.21	Гендрико И.Ю.	[illegible]

№1

1	2	3	4	5
7	7	7	7	7

Ответ: нет, не существует.
Даны числа: ① $\sqrt{x^2+2020}-x$; ② $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020}$; ③ $2x-\sqrt{x^2+2020}$. Предположим, что такое число x существует.
Рассмотрим в-ие ②. Т.к. $\sqrt{x^2+2} \neq \sqrt{x^2+2020}$ (т.к. $x^2+2 \neq x^2+2020$), то $\sqrt{x^2+2}$ и $\sqrt{x^2+2020}$ должны быть целыми числами x, иначе при извлечении корней получили бы разность 2-х разных иррациональных чисел, которая точно не равна к.-л. целому числу. Значит, x^2+2 и x^2+2020 – кв-ты целых чисел, т.е. точные квадраты.
Рассмотрим выр-ия ① и ③ (*). ~~Т.к. в этих выр-иях~~ см. дополнение на с.9 (*)
~~$\sqrt{x^2+2020}$~~ т.к. x^2+2020 – точный квадрат ~~– целое число, то и x должно быть целым числом, т.к. иначе, если бы x был иррациональным или дробным числом~~ (нецелым), то $2x-\sqrt{x^2+2020}$ и $\sqrt{x^2+2020}-x$ были ~~бы нецелыми числами. Значит~~ Значит, x – целое число, $\Rightarrow x^2$ – кв-т целого числа, т.е. точный квадрат. Получаем, что для вып-ия ~~условия~~ требования x^2, x^2+2020 и x^2+2 должны быть точными кв-тами. Подставим несколько целых чисел ~~вместо~~ x, начиная от 0:
при $x=0$: 0, $0+2020=2020$, $0+2=2$.
0 – точ. кв., 2020 – не точ. кв., 2 – не точ. кв.
при $x=1$ (или -1): 1, 2021, 3
1 – точ. кв., 2021 – не точ. кв., 3 – не точ. кв.
при $x=2$ (или -2): 4, 2024, 6
4 – точ. кв., 2024 – не точ. кв., 6 – не точ. кв-т

7 б

Место для скобы

Шифр 004010

~~точные~~ кв-ты целых чисел (и от 1(или -1) и т.д., но этот случай и случай при $x=1$ я уже рассмотрел и случай при $x=2$)

Т.к. дальше, ~~числа~~, начиная от 3 (или -3) и более (или менее в случае с отр. числами) отличаются друг от друга по модулю более чем на 2:

$9, 16, 25, 36 \ldots$ и т.д. (7, 9, 11 - отличаются), то x^2 и x^2+2 не могут одновременно быть точными кв-ми, ~~зн-а~~ случаи с числами 0, 1(-1), 2(-2), ~~3(-3)~~ были рассмотрены и было ~~до~~ показано, что при этих числах условие тоже не выполняется, т.к. числа x^2; x^2+2, x^2+2020 тоже не являются одновременно точными квадратами.

След-но, не существует числа x такого, что все 3 числа ①, ②, ③ являются целыми, ~~т~~ предположение неверно.

Ответ: не существует

№2

70

4. $\begin{cases} 5xy+yz+2xz=-x, & (1) \\ 14xy+3yz+5xz=-4x, & (2) \\ 2xy+xz=4x & (3) \end{cases}$

1) $5xy+yz+2xz=-x \quad / \cdot (3)$

$15xy+3yz+6xz=-3x, \quad (1')$

2) $14xy+3yz+5xz=-4x \quad / \cdot (-1)$

$-14xy-3yz-5xz=4x \quad (2')$

Сложим выр-ия (1') и (2'):

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{l} 15xy+3yz+6xz=-3x \\ -14xy-3yz-5xz=4x. \end{array} \\ \hline xy+xz=x \end{array}$$

$x=x(y+z)$ (*)

Место для скобы

Шифр 004010

$x(y+z)-x=0$

$x(y+z-1)=0$

$\left[\begin{array}{l} x=0, \\ y+z-1=0; \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ y+z=1; \end{array}\right.$

Если $x=0$, то с-ма ур-ний будет выглядеть так:

$\begin{cases} 0+yz+0=0, \\ 0+3yz+0=0, \\ 0+0=0; \end{cases}$ $\Rightarrow yz=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ z\text{ - любое число;} \end{cases} \\ \begin{cases} z=0 \\ y\text{ - любое число;} \end{cases} \end{array}\right.$

Если $x\neq 0$, $y+z=1$:

(3) $2xy+xz=4x$

(*) $x=x(y+z)$

$2xy+xz=4x(y+z)$

$2xy+xz=4xy+4xz$

$3xz+2xy=0$

$x(3z+2y)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=0, \\ 3z+2y=0; \end{array}\right.$

т.к. рассматривается сл-й. при $x\neq 0$, то:

$3z+2y=0$

т.к. $y+z=1$, то $y=1-z$

$3z+2y=0$

$3z+2(1-z)=0$

$3z+2-2z=0$

$z=-2$

т.к. $y=1-z$, то $y=1-(-2)=3 \Rightarrow y=3$

(1) $5xy+yz+2xz=-x$

Место для скобы

Шифр

$15x-6*-4x=-x$

$12x=6$

$x=0,5$

~~Итого:~~ Ответ: решения с-мы ур-ий:

$\begin{cases} x=0, \\ y=0, \\ z - \text{любое число}; \end{cases}$ или $\begin{cases} x=0 \\ y - \text{любое число}, \\ z=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=0,5, \\ y=3, \\ z=-2; \end{cases}$

№3

$f(x)$ – кв. трёхчлен, $f(x)=ax^2+bx+c, a\neq 0.$

$f(0)=a\cdot 0+b\cdot 0+c=c$

$f(1)=a\cdot 1+b\cdot 1+c=a+b+c$

$f(2)=4a+2b+c\neq$

$f(3)=9a+3b+c\neq$

7б

$\begin{cases} f(0)+f(1)=0, \\ f(2)+f(3)=0; \end{cases}$ $\begin{cases} c+a+b+c=0, \\ 4a+2b+c+9a+3b+c=0; \end{cases}$ $\begin{cases} \cancel{a+b=+}2c=-a-b, (1) \\ 13a+5b+2c=0; (2) \end{cases}$

(2) $13a+5b+2c=0$

(1) $2c=-a-b$

$13a+5b*-a-b=0$

$12a+4b=0$

$4(3a+b)=0 \quad |:4$

$3a+b=0$

$b=-3a \quad (3)$

Место для скобы

Шифр

(1) $2c=-a-b$

(3) $b=-3a$

$2c=-a-(-3a)$

$2c=-a+3a$

$2c=2a \quad |:2$

$c=a$

Получили, что $b=-3a$; $c=a$.

Тогда $f(x)$ имеет вид: $f(x)=ax^2-3ax+a$.

Рассмотрим $f(x)=2020$

$ax^2-3ax+a=2020$

$ax^2-3ax+a-2020=0$

по т. Виета: $\begin{cases} x_1+x_2=\frac{3a}{a}, & (5) \\ x_1\cdot x_2=\frac{a-2020}{a}; \end{cases}$

(5) $x_1+x_2=\frac{3a}{a}$

$x_1+x_2=3 \Rightarrow$ сумма корней ур-ия $f(x)=2020$ равна 3.

Ответ: 3.

№4

~~Дано нер-во~~

$\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}$ и 2

7б

Необходимо доказать, что левая часть больше правой,

т.е., что $\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}>2$

Разделим левую и правую части на 2. Получим:

$\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}{2}$ и ~~≥~~ 1. Тогда нужно док-ть, что ~~левая часть~~ $\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}{2}>1$.

По нер-ву Коши: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$

$$\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}{2}>\sqrt{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}\cdot\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}$$

Преобразуем правую часть:

$$\sqrt{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}\cdot\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}=\sqrt{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}\cdot 2021\cdot 2019^{-1}}}=\sqrt{\sqrt[2020]{\frac{2020\cdot\cancel{2021}}{2019\cdot\cancel{2021}}}}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}}$$

$\frac{2020}{2019}=1\frac{1}{2019}$ ~~≥~~ $>1\Rightarrow\frac{2020}{2019}>1$

т.к. $\frac{2020}{2019}>1$, то $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}>1$ (т.к. любое число по модулю <1 дает в к.-л. степени число ~~по модулю~~ <1, а любое число по модулю >1 дает в к.-л. степени число ~~по модул~~ >1, а т.к. число $\frac{2020}{2019}>1$, то и неотрицательное $\sqrt{}$ число, к-ое дает это число $\left(\frac{2020}{2019}\right)$ в 2029 степени, ~~>1~~ т.е. $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}>1$). Аналогично рассуждая, квадратный корень из числа >1, также >1, т.е. $\sqrt{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}}>1$.

А поскольку по нер-ву Коши: $\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}{2}>\sqrt{\sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}}$ /

Место для скобы

Шифр

~~то~~ $a^{-1}\sqrt[2010]{\frac{2020}{2019}} > 1$, то $\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}}{2} > 1$

Домножив на 2 левую и правую части нер-ва, получим то, что было необходимо доказать:

$\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot \cancel{2020}\, 2019^{-1}} > 2$ ~~ч.т.д.~~

Левая часть больше правой, что и требовалось доказать.

№5

Место для скобы

Шифр

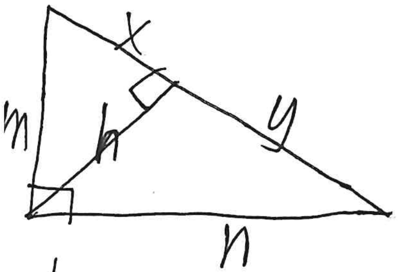
№5

Нет, невозможно.

Дано: прям. Δ; k - гип-за; m; n - катеты; h - высота к гипотенузе.

Док-ть: $k+h > m+n$?

Док-во: Обозначим пр-ции катетов на гипотенузу: проекцию m - за x, проекцию n - за y:



$k = x+y$ (по А изм. отр.)

$h = \sqrt{xy}$

$m = \sqrt{k\cdot x} = \sqrt{(x+y)x}$ — по метрическим соотношениям в прямоугольном Δ-е.

$n = \sqrt{k\cdot y} = \sqrt{(x+y)\cdot y}$

$k+h$ и $m+n$

$x+y+\sqrt{xy}$ и $\sqrt{(x+y)x} + \sqrt{(x+y)y}$

$x+y+\sqrt{xy}$ и $\sqrt{(x+y)}(\sqrt{x}+\sqrt{y})$

Возведем обе части в квадрат:

$(x+y+\sqrt{xy})^2$ и $(\sqrt{(x+y)}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{y}))^2$

$x^2+y^2+xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}+2xy$ и $(x+y)(x+2\sqrt{xy}+y)$

$x^2+y^2+3xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}$ и $x^2+\cancel{xy}+2x\sqrt{xy}+xy+xy+2y\sqrt{xy}+y^2$

$x^2+y^2+3xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}$ и $x^2+y^2+2xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}$

7б

Место для скобы

Шифр

Вычтем из левой и правой части $x^2+y^2+2xy+2x\sqrt{xy}+2y\sqrt{xy}$: xy и 0

т.к. x и y - отрезки, то $x>0$ и $y>0$.

Следовательно, $xy>0$

А поскольку левая часть оказалась больше правой и преобразовывалось ~~выр-ие~~ нер-во $k+h$ и $m+n$, и знак нер-ва не менялся (т.к. не умножали на величины отриц.), то $(k+h)^2>(m+n)^2 \Rightarrow k+h>m+n$ (т.к. все числа $k, h, x, y, m, n >0$ (т.к. это ~~отрез~~ отрезки))

т.к. $k+h>m+n$, то не может быть ~~такого~~ того, чтобы $k+h<m+n$. Значит, сумма $k+h$ не может быть меньше суммы $m+n$ $(k+h>m+n)$.

Ответ: нет, не возможно.

№1 (дополнение) (*)

Рассм. выр-ия ① и ③ т.к. по предположению, существует такое число x, что выр-ия ①, ②, ③ - целые числа, то сумма выр-ий ① и ③ - тоже должна являться целым числом (сумма целых ~~выр-ий~~ чисел равна целому числу). Тогда:

$$\sqrt{x^2+2020}-x+2x-\sqrt{x^2+2020}=x$$

След-но, x должен быть целым числом.