08042

Шифр

...КРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

...ет	МАТЕМАТИКА
...т	1
	11
...ия	СУРУН-ООЛ
	ЛИНА
...во	САЛИМОВНА
...ождения	02 (Число) 04 (Месяц) 2005 (Год)
	Россия
(пр: Томская обл., ...нградская область)	Республика Тыва
...иципального образования *...деревня, село, город)*	город
...нный пункт *(пр: Томск, ...во, Псков)*	Кызыл
... наименование ...ательного учреждения, ...ом Вы обучаетесь в ...время	МАОУ „Лицей N15"

...ие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail ...ультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ________

Шифр 08042

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16	29.03	Корюкина Е.Е.	

Задание 4:

$ax^3 - ax^2 + bx + b = 0$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, x_1, x_2, x_3 – корни.

по Т. Виета:

1	2	3	4	5	Σ
4	2	3	7	0	16

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{a}{a}, & (1) \\ x_1 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3 = \frac{b}{a}, & (2) \\ x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = -\frac{b}{a}; & (3) \end{cases}$$

разделим ур-ие (2) на ур (3):

имеем: $\frac{x_1 \cdot x_2}{x_3 \cdot x_1 \cdot x_2} + \frac{x_1 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} + \frac{x_2 \cdot x_3}{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3} = \frac{b}{a} \cdot \left(-\frac{b}{a}\right)$

$$\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1} = -1. \quad (4)$$

(1) $x_1 + x_2 + x_3 = \frac{-a}{-a} = \frac{a}{a} = 1$

~~разделим~~ умножим ур-ие (1) на ур-ие ~~(3)~~ (4):

имеем: $(x_1 + x_2 + x_3)\left(\frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_1}\right) = 1 \cdot (-1) = -1$

ч т д.

Задание 3:

$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1 \quad / \cdot (3(a+b)(b+c)(a+c))$, т.к. числа положит (т.е. >0)

$\underbrace{2a(a+b)(a+c) + 2b(b+c)(b+a) + 2c(c+a)(c+b)}_{(1)} \geq \underbrace{3(a+b)(b+c)(a+c)}_{(2)}$

(1) $2a^3 + 2a^2b + 2a^2c + 2abc + 2b^3 + 2b^2a + 2b^2c + 2abc + 2c^3 + 2c^2a + 2c^2b +$

$+ 2abc = 2a^3 + 2b^3 + 2c^3 + 6abc + 2b^2a + 2b^2c + 2a^2b + 2a^2c + 2c^2a + 2c^2b$

(2) $3(b+c)(a+b)(a+c) = 3(b+c)(a^2 + ac + bc + ba) = 3(a^2b + a^2c + abc + b^2c + b^2a +$

$+ac^2+bc^2+abc) = 3a^2c+3a^2b+3b^2c+3b^2a+3c^2a+3c^2b+6abc$

$2a^3+2b^3+2c^3+2b^2a+2b^2c+2a^2b+2a^2c+2c^2a+2c^2b+6abc \geq 3a^2c+3a^2b+3b^2c+3b^2a+$

$+3c^2a+3c^2b+6abc \quad \Big/ -6abc$

$2a^3+2b^3+2c^3+2b^2a+2b^2c+2a^2b+2a^2c+2c^2a+2c^2b \geq 3a^2c+3a^2b+3b^2c+3b^2a+$

$+3c^2a+3c^2b$

$2a^3+2b^3+2c^3-b^2a-b^2c-a^2b-a^2c-c^2a-c^2b \geq 0$

$\cancel{2a^3 \quad a^2(2a-b-c)+b^2(2b-a-c)+c^2(2c-a-b) \geq 0.}$

$(a^3+b^3)+(a^3+c^3)+(b^3+c^3)-a^2(a+b)-b^2(a+b)-c^2(a+b) \geq 0.$

$(a+b)(a^2-ab+b^2)+(a+c)(a^2-ac+c^2)+(b+c)(b^2-bc+c^2)-$

$-a^2(a+b)-b^2(a+c)-c^2(a+b) \geq 0.$

$(a+b)(a^2-ab+b^2-c^2)+(a+c)(a^2-ac+c^2-b^2)+(b+c)(b^2+c^2-bc-a^2) \geq 0$

$(a^3+b^3)+(a^3+c^3)+(b^3+c^3)-a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b) \geq 0$

$(a+b)(a^2+b^2-ab)+(a+c)(a^2+c^2-ac)+(b+c)(b^2+c^2-bc)-$

$-a^2(b+c)-b^2(a+c)-c^2(a+b) \geq 0$

$(a+b)(a^2+b^2-ab-c^2)+(b+c)(b^2+c^2-bc-a^2)+(a+c)(a^2+c^2-ac-b^2) \geq 0$

1) $a=b=c$: $2a(a^2-a^2-a^2)=0$. => ч.т.д.

2) $a>b>c>0$: $\underbrace{(a+b)}_{>0}\underbrace{(a^2+b^2-ab-c^2)}_{>0}+\underbrace{(b+c)}_{>0}\underbrace{(b^2+c^2-bc-a^2)}+\underbrace{(a+c)}_{>0}\underbrace{(a^2+}$

$\underbrace{+c^2-ac-b^2)}$

По неравенству Коши: $a^2+b^2 \geq 2ab$ =>

=> $(a+b)(2ab-ab-c^2)+(b+c)(2bc-bc-a^2)+(a+c)(2ac-ac-b^2) \geq 0$

$(a+b)(ab-c^2)+(b+c)(bc-a^2)+(a+c)(ac-b^2) \geq 0$

$a^2b-c^2a+b^2a-c^2b+b^2c-a^2c+c^2b-a^2b+a^2c-b^2a+c^2a-b^2c \geq 0$

$0 \geq 0$, ч.т.д.

1/+

место для скобы

Шифр 08042

Задание 1:

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$$

$$\underbrace{\underbrace{2x^2}_{\ge 0}+\underbrace{2x^2z^2}_{\ge 0}+\underbrace{z^2}_{\ge 0}+\underbrace{7y^2}_{\ge 0}+\underbrace{33}_{>0}}=42y$$

$$\Rightarrow 42y>0 \Leftrightarrow \boxed{y>0}$$

$$2x^2+2x^2z^2+z^2+7y^2-42y+33=0$$

$$2x^2(1+z^2)+z^2+1+32+7y(y-6)=0$$

$$(2x^2+1)(1+z^2)+32+7y(y-6)=0$$

$$\underbrace{\underbrace{(2x^2+1)}_{>0}\underbrace{(1+z^2)}_{>0}+\underbrace{32}_{>0}}=-7y(y-6)$$

$$\Rightarrow -7y(y-6)>0$$

$$7y(y-6)<0,\ y>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y-6<0$$

$$y<6$$

Значит $y\in(0;6)$, по условию x, y, z – целые:

1) $y=1 \Rightarrow (2x^2+1)(z^2+1)+32+7(1-6)=0$

$(2x^2+1)(z^2+1)=-32-7(-5)=35-32=3$, т.к. x, y, z – целые $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ есть 2 варианта: 1. $(2x^2+1)=1 \Rightarrow (z^2+1)=3$

2. $(2x^2+1)=3 \Rightarrow (z^2+1)=1$

1. $2x^2+1=1$, $x=0$; $z^2+1=3$, $z=\pm\sqrt{2}$ – не имеет смысла.

2. $2x^2+1=3$, $x=\pm1$; $z^2+1=1$, $z=0$ $\Rightarrow$ $(-1;0,1)$ и $(1,0;1)$

2) $y=2 \Rightarrow (2x^2+1)(z^2+1)+32+7(2-6)=(2x^2+1)(z^2+1)+32-28=0$

$(2x^2+1)(z^2+1)+4=0$ – не имеет смысла

скобы

Шифр 08042

если рассматривать $y=2$, $y=3$, $y=4$, $y=5$, пример точке не будет иметь смысла, т.к произведение двух положит чисел не может быть меньше 0 $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Ответ: $(-1;0;1)$ и $(1;0;1)$

Задание 2:

$2^{lg(x^2-2023)} - lg\,2^{x^2-2022} = 0$ | ОДЗ: $x^2-2023>0$

$x \in (-\infty; -\sqrt{2023}) \cup (\sqrt{2023}; +\infty)$

$2^{lg(x^2-2023)} = lg\,2^{x^2-2022}$

решим графически

график условн.

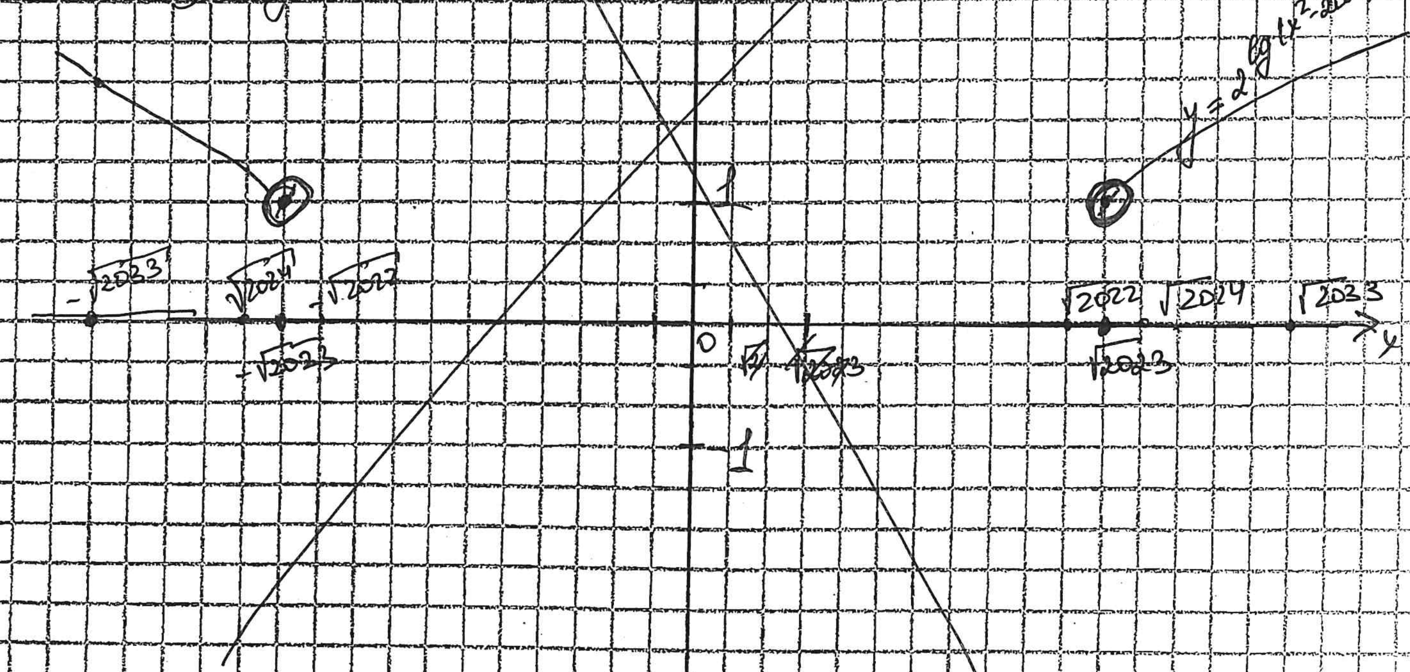
$y = 2^{lg(x^2-2023)}$

$y = lg\,2^{x^2-2022}$

~~$x = \pm\sqrt{2023} \Rightarrow y = 1$~~ $x = \pm\sqrt{2024} \Rightarrow y = 1$

$x = \pm\sqrt{2022} \Rightarrow y =$

$x = \pm\sqrt{2032} \Rightarrow y = 2$



скобы

Шифр 8042

Задание 2

$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$ | ОДЗ: $x^2-2023>0$

$x \in (-\infty; -\sqrt{2023}) \cup (\sqrt{2023}; +\infty)$

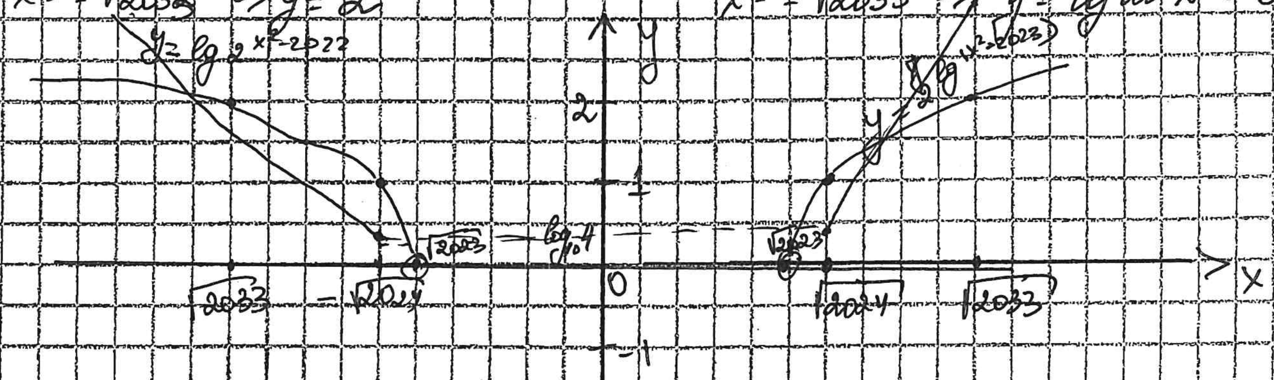
$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022} \neq 0$

решим графически (ус график условный)

$y = 2^{\lg(x^2-2022)}$ $y = 2\lg 2^{x^2-2022}$

$x = \pm\sqrt{2024} \Rightarrow y = 1$ $x = \pm\sqrt{2024} \Rightarrow y = \lg 4 < 1$

$x = \pm\sqrt{2032} \Rightarrow y = 2$ $x = \pm\sqrt{2033} \Rightarrow y = \lg 2048 > 3$



по графику мы видим, что у ур-ие 2 решения,

~~$x_1 \in$~~ где $x_1 \in (\sqrt{2024}; \sqrt{2033}) \Rightarrow y \in (1; 3)$

$x_2 \in (-\sqrt{2033}; -\sqrt{2024}) \Rightarrow y_2 \in (1; 3)$

Ответ: 2