Место для скобы

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

03670

Шифр

1.	Предмет	Математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	10 н
4.	Фамилия	СУХОВЕРШИНА
	Имя	ДАРЬЯ
	Отчество	ЕВГЕНЬЕВНА
5.	Дата рождения	12 (Число) 12 (Месяц) 2005 (Год)
6.	Страна	россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Новосибирская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	г. карасук
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	МБОУ Технический лицей №176

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр 03670

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
31		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
7	3	7	7	7	31

3) Кубическое уравнение $a^3-2022a+1011=0$ имеет три различных действительных корня. Т.к уравнения относительно переменных в и с имеют такие же коэффициенты, то они имеют такие же корни.
=> решаем 1 уравнение: $a^3-2022a+1011=0$, решением которого будут являться действительные числа a, в, с. Выведем т. Виета для куб. уравнения:

$(x-a)(x-b)(x-c)=(x^2-ax-bx+ab)\cdot$
$\cdot(x-c)=x^3-ax^2-bx^2+abx-cx^2+acx+bcx-abc=0$
$x^3-(a+b+c)x^2+(ab+ac+bc)x-abc=0.$

По т. Виета для ур-ия $x^3+0x^2-2022x+1011=0$ корнями которого являются числа a, в, с:

$$\begin{cases} a+b+c=0 \\ ab+bc+ac=-2022 \\ a\cdot b\cdot c=-1011 \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим выражение

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{ab+bc+ac}{abc}$$

Подставим значения числ. и знамен-ля из равенства (1):

$$\frac{-2022}{-1011}=2$$

т.о $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=2$

Ответ: 2

①	$n!$	$\Sigma n!$
	$1!$	1
	$2!=1\cdot2=2$	$1!+2!=1+2=3$
	$3!=6$	$1!+2!+3!=9$
	$4!=24$	$9+24=33$

$5! = 120$	$33 + 120 = 153$
$6! = 720$	873

Заметим, что при $n \geq 5$ факториал числа n заканчивается на 0 (т.к среди множителей есть 2 и 5). $\Rightarrow$ при $n \geq 5$ сумма слагаемых всегда заканчивается на 3.

Т.к полученная сумма заканчивается на 3, то квадрат этого числа - число ~~не~~четное)

Но квадрат нечетного числа всегда заканчивается на 1, 5 или 9 поэтому будем искать точный квадрат среди сумм ряда при $n<5$ это числа 1 и 3

Ответ: 1 и 3

4. Раскроем скобки и упростим многочлен:

$$\cancel{a^2x^2} + \cancel{a^2y^2} + a^2z^2 + b^2x^2 + \cancel{b^2y^2} + \cancel{b^2z^2} + \cancel{c^2x^2} + c^2y^2 + \cancel{c^2z^2} - \cancel{a^2x^2} - \cancel{b^2z^2}$$

$$- 2axbz - \cancel{b^2y^2} - \cancel{c^2x^2} - 2byxc - \cancel{c^2z^2} - \cancel{a^2y^2} + 2czay =$$

$$(az)^2 + (bx)^2 + (cy)^2 - 2axbz - 2byxc + 2czay.$$

Предположим, что это формула сокращенного умножения квадрат суммы для трёх слагаемых, т.е $(bx - cy - az)^2$.

Шифр 03670

Проверим: $(bx-cy-az)^2=(bx-cy-az)(bx-cy-az)=$
$=b^2x^2-bxcy-bxaz-bxcy+(cy)^2+azcy-azbx+azcy$
$+(az)^2=(az)^2+(bx)^2+(cy)^2-2axbz-2bycx+2czay.$

Предположение подтвердилось, т.е
исходный многочлен можно представить в виде
$(bx-cy-az)^2 => (bx-cy-az)^2 \geq 0$

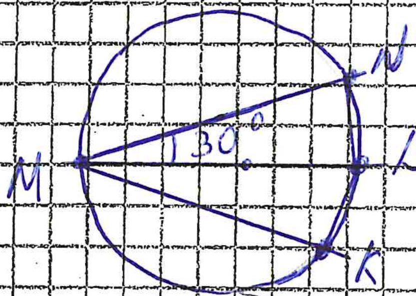
что и требовалось доказать

№5

Случай 1:

Дано:

Окружность проходит через вершину M,
пересекает $\angle MB$ (M) в N и K
ML - биссектриса угла.
$\angle NML=30°$
$S_{MNLK}=25$



$MN+MK-?$

биссектриса угла
совпадает с диаметром.

$\angle MNL=\angle LKM=90°$ (опирается на диаметр)
$\angle NML=\angle KML=30°$ (ML - биссектриса)
ML - общая. =>

$\Delta MNL=\Delta MKL$ (по гипотенузе и острому углу)
$=> S_{MNL}=\frac{25}{2}$

скобы

Шифр 03670

Пусть $MN = MK = x$; $NL = y$.

$$\begin{cases} S_{MNL} = \frac{1}{2} x \cdot y \\ \frac{y}{x} = tg\,30^\circ \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{25}{2} = \frac{xy}{2} \\ y = x \cdot tg\,30^\circ \end{cases}$$

$25 = x \cdot x \cdot tg\,30^\circ$ $\qquad x = \sqrt{\frac{25 \cdot \sqrt{3}}{1}}$

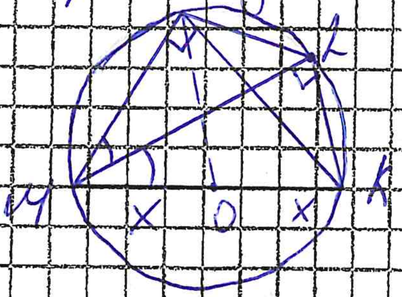
$x^2 = \frac{25}{tg\,30}$ $\qquad x = 5 \cdot \sqrt[4]{3}$

$x = \sqrt{\frac{25}{tg\,30}}$ $\qquad MN + MK = 10\sqrt[4]{3}$

Ответ: $10\sqrt[4]{3}$

Случай 2:

Сторона угла совпадает с диаметром



$\triangle MNO$ – равносторонний

$MO = NO$ – как радиусы

$\angle NMO = 60^\circ$ $\Rightarrow MO = MN = x$; $MK = 2x$

$MN + MK = 3x$

$ML = y$

$S_{MNLK} = S_{\triangle MNL} + S_{\triangle MKL} = \frac{1}{2} x \cdot y \cdot \sin 30^\circ +$
$+ \frac{1}{2} 2x \cdot y \cdot \sin 30^\circ$

$\frac{xy}{4} + \frac{xy}{2} = 25$ $\qquad 3xy = 100$ $\qquad xy = \frac{100}{3}$
(1)

$\triangle MNK$ – прямоугольный ($\angle MNK$ опирается на диаметр).

По т. Пифагора $NK = x\sqrt{3}$.
в $\triangle MLK$: $\angle KML = 30^\circ$; $\angle MLK = 90^\circ$ (опирается на диаметр); $\angle LKM = 60^\circ$ (по т. о сумме углов треугольника) $\Rightarrow \triangle MNK = \triangle KLM$ (по гипотенузе и острому углу) $\Rightarrow NK = LM = x\sqrt{3} = y$ (2)
Подставим (2) в (1):

$$x \cdot x\sqrt{3} = \frac{100}{3} \qquad x = \sqrt{\frac{100}{3\sqrt{3}}} \qquad x = \frac{10}{\sqrt{3}\,\sqrt[4]{3}} = \frac{10 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{3} = \frac{10 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt[4]{3^3}}{\cancel{3} \cdot 3} = \frac{10}{3}\sqrt[4]{3}$$

$$x^2 = \frac{100}{3\sqrt{3}} \Rightarrow 3x = 10\sqrt[4]{3}$$

Ответ: $10\sqrt[4]{3}$

Рассмотрев частные случаи расположения угла, мы получили одно и то же значение суммы сторон угла. Можно сделать вывод, что при любом возможном расположении угла, результатом сложения длин сторон MN и MK будет одна и та же величина.

Ответ: $10\sqrt[4]{3}$

(2) $p(x)=(a+1)x^2-(a+1)x+2022$

$-2022\le p(x)\le 2022$ $\quad 0\le x\le 1$ $\quad x_0=\frac{-(a+1)}{-2(a+1)}=\frac{1}{2}$

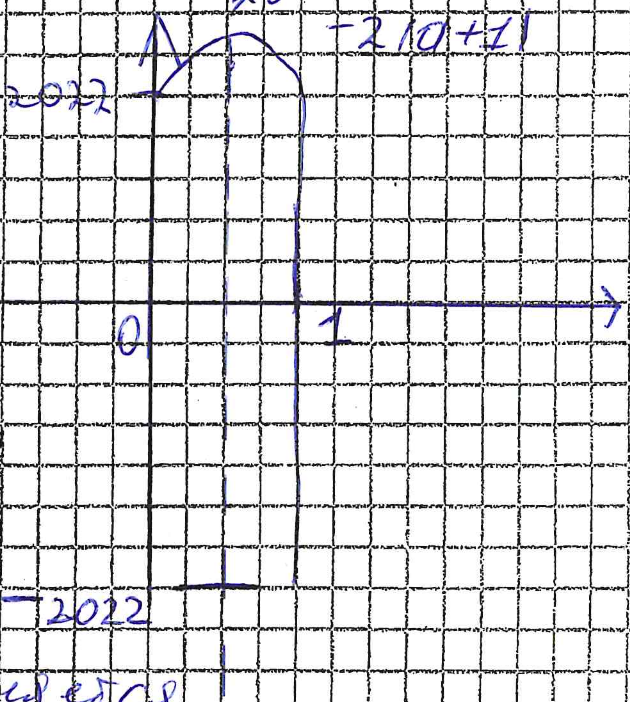
1 случай

$a+1<0$

$p(0)=2022$

$p(1)=2022$

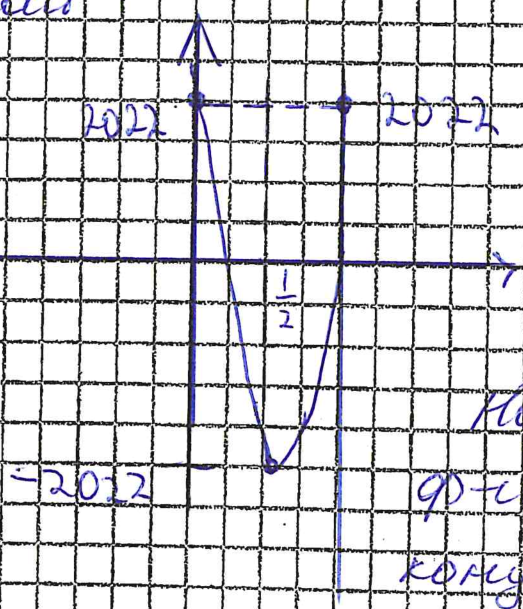
ветви параболы вниз



При $a+1<0$ не выполняется неравенство: $p(x)>2022$

2 случай

$a+1\ge 0$



Наибольшее значение ф-ия принимает на концах интервала при

$a+1=0 \Rightarrow a=-1$

Ответ: -1