Место для скобы

03957

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»
ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	Математика
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	СУДАКОВ
	Имя	ГРИГОРИЙ
	Отчество	ВЛАДИСЛАВОВИЧ
5.	Дата рождения	Число: 21; Месяц: 01; Год: 2005
6.	Страна	Российская Федерация
7.	Регион *(пр: Томская обл., Калининградская область)*	Санкт-Петербург
8.	Вид муниципального образования *(пр: пгт, деревня, село, город)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Санкт-Петербург
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь в данное время	ГБОУ Вторая СПб гимназия

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ______________

Место для скобы

Шифр 03957

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
16		Емельянова	Ем

1	2	3	4	5	Σ
3	–	3	6	4	16

1. Вычислить $2022!\cdot(S_{2021}-1)$

$$S_{2021}=\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\frac{3}{4!}+\dots+\frac{n!}{n+1!}$$

$$\frac{n}{(n+1)!}+\frac{(n-1)}{n!}=\frac{n+(n-1)(n+1)}{(n+1)!}=\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}$$

$$\frac{n^2+n-1}{(n+1)!}+\frac{n-2}{(n-1)!}=\frac{n^2+n-1+(n-2)(n-1)n}{(n-1)!}=\frac{n^3+n-3}{(n-1)!}$$

~~Как мы видим после каждого возведения в ...~~

Как мы видим, при сведении слагаемых степень числителя увеличивается на 1 т.к. разность того, от чего мы берём факториал пропорционально росту $\Rightarrow$ при приведении к общ. знаменателю нам надо умножать на n в степени этой разности $\Rightarrow$ для 2021 сумм

$$S_{2021}=\frac{n^{2021}\dots}{(n+1)!}\Rightarrow \lim_{n\to 2021}\frac{n^{2021}+\text{бесконечное}}{(n+1)!}=1\Rightarrow S_{2021}=1\Rightarrow$$

$2022!\cdot(S_{2021}-1)=0$

Ответ: 0.

Продолжение на след. бланке

Место для скобы

Шифр 03957

3. $P(x) = x^2 + 3x + 2$.

Вычислить: $\left(1 - \frac{2}{P(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{P(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{P(3)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{2}{P(2024)}\right)$

$x^2 + 3x + 2 = 0$.

$x_1 + x_2 = -3$

$x_1 \cdot x_2 = 2$.

$x_1 = -1$

$x_2 = -2$.

$x^2 + 3x + 2 = (x+1)(x+2)$.

$\left(1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(x+2)(x+3)}\right)\left(1 - \frac{2}{(x+3)(x+4)}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{2}{(x+2024)(x+2025)}\right)$

$\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{x \to \infty} 1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} = 1 \Rightarrow$ при больших значениях

$1 - \frac{2}{(x+1)(x+2)} \approx 1$.

Для малых значений:

$\frac{5}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6}$ ... $\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{P(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{P(2)}\right)$

$\frac{1}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{9}{10} \Rightarrow \left(1 - \frac{2}{P(1)}\right)\left(1 - \frac{2}{P(2)}\right)\left(1 - \frac{2}{P(3)}\right)$.

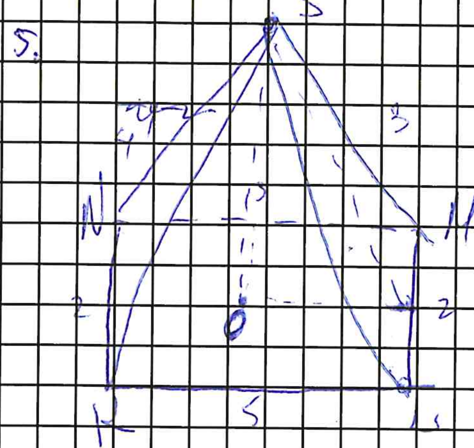
Получаем ряд $\frac{5}{9}, \frac{1}{2}, \frac{14}{30}, \frac{4}{9}, \frac{13}{?}, \frac{5}{12}, \frac{11}{27}, \frac{2}{5}, \frac{13}{33}$ и т.д. каждый раз мы умножаем число, которое всё больше стремится к единице но всё же немного меньше. $\Rightarrow$ ряд будет стремится к $\frac{1}{3}$ т.к. каждое произведение будет всё меньше отличатся от предыдущего

Ср. арфм. ~~про~~ промеж. произведений при боле больших числах также будет стремится к $\frac{1}{3}$. Ответ: $\frac{1}{3}$.

Место для скобы

Шифр 03957

5.



Р-е: Т.к. пирамида $SNKLM$ — пр/уг. ⇒

$NM = KL = 5$, $NK = ML = 2$.

$V_{SNKLM} = \frac{1}{3} h \cdot S_{осн}$

$S_{осн} = NM \cdot NK$ — дано по усл. ⇒

$V_{пир}$ зависит от высоты пирамиды.

Как известно наш высота в пирамиде с равными основаниями, в помощи медиане можно симметрию можно объяснить.

пусть $SN = SM = 3$, $SK = SL = 4$. ? почему? Нет обоснования!

Проведём высоту SH в $\triangle SNM$ т.к. $\triangle$ р/б ⇒ SH — медиана ⇒ $NH = \frac{3}{2}$

$SH^2 = SN^2 - NH^2$ по т. Пифагора.

$SH = \sqrt{9 - \frac{9}{4}} = \frac{\sqrt{27}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$.

SO — высота попадает в „центр" прямоугольника из-за симметрии, так, что $OH = \frac{1}{2} KL$ (т.к. $OH \parallel KL$) ⇒ $OH = \frac{5}{2}$.

$SO^2 = SH^2 - OH^2$ по т. Пифагора $SO = \sqrt{\frac{27}{4} - \frac{25}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

$V = \frac{1}{3} \cdot h \cdot 5 \cdot 2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot 5 \cdot 2 = \frac{5\sqrt{2}}{3}$.

Ответ: $\frac{5\sqrt{2}}{3}$

Продолжение на след. бланке.

Место для скобы

Шифр 03957

4. $\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}$ - вычислить

$$\begin{cases} a^3-2022a^2+1011=0 \\ b^3-2022b^2+1011=0 \\ c^3-2022c^2+1011=0 \end{cases}$$

$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ac}=\frac{a+b+c}{abc}$

т.к. a,b,c - различные по усл. $\Rightarrow$ т.к. все 3 уравнения имеют одинаковые коэф., а также 3 степень $\Rightarrow$ a,b,c - являются 3 различными корнями уравнения тогда всяк. по т. Виета.

$a^3-2022a^2+1011=0$.

$$\left.\begin{array}{l} a_1+a_2+a_3=2022 \\ a_1\cdot a_2\cdot a_3=\underline{1011}. \end{array}\right\}$$ знак! т.к. уравнения для a,b,c - идентичны $\Rightarrow$

$\Rightarrow a=a_1;\ b=a_2;\ c=a_3$. (то же самое для остальных уравнений) $\Rightarrow$

$a+b+c=2022$

$abc=1011$ $\Rightarrow \frac{a+b+c}{abc}=\frac{2022}{1011}=2$ - что и требовалось доказать.

Ответ: 2.