ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

07461

Шифр

мет	Математика
ант	1
:	11
лия	Сукова
	Александра
тво	Игоревна
рождения	26 (Число) 07 (Месяц) 2005 (Год)
а	Россия
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Республика Хакасия
ниципального образования *и, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Черногорск
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	МБОУ „Гимназия" г. Черногорска

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Сук

1	2	3	4	5
2	1	2	7	5

Шифр 07461

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
17б	30.03.23	Гендрикс	

№ 1.

x, y, z – целые числа.

20б

$$\underbrace{2x^2+2x^2z^2+z^2}_{\text{всегда } \geq 0\text{, т.к. в квадрате}}+7y^2-42y+33=0$$

Пусть: $A = 2x^2+2x^2z^2+z^2+33 \quad (A \geq 33)$ A – целое число.

$$7y^2-42y+A=0$$

Если $D \geq 0$, то будут сущ. решения

$$D = 42^2-4\cdot 7\cdot A \Rightarrow A \leq \frac{42\cdot 42}{4\cdot 7} \Rightarrow A \leq 63$$

Получаем: $33 \leq A \leq 63$ (A – целое число) т.е. $A \in \{33; 34; 35 \dots 63\}$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = \frac{42-\sqrt{D}}{14} \\ y_2 = \frac{42+\sqrt{D}}{14} \end{array}\right\} \Rightarrow y_{1,2} = 3 \pm \frac{\sqrt{D}}{14} \Rightarrow \sqrt{D} \vdots 14$$

($\sqrt{D}$ – целое число, кот. делится без ост. на 14)

$$\sqrt{42^2-4\cdot 7\cdot A} \vdots 14 \Rightarrow \sqrt{28(63-A)} \vdots 14 \Rightarrow (28(63-A)) \vdots 14^2 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow (42^2-28A) \vdots 14^2 \\ \frac{42^2}{14^2}=9 \Rightarrow 42^2 \vdots 14^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 28A \vdots 14^2 \Rightarrow A \vdots 7$$

Если $33 \leq A \leq 63$ и $A \vdots 7$, то $A \in \{35; 42; 49; 56; 63\} \Rightarrow$

$$\Rightarrow (2x^2+2x^2z^2+z^2) \in \{2; 9; 16; 23; 30\}.$$

~~Предположим, что $x=0 \Rightarrow z^2 = 2 / 9 / 16 / 23 / 30$, т.к. z – цел. число, то $z^2=9$ или $z^2=16$ (При $A=42$)~~

Вспомним, что $\sqrt{D}$ должно быть целым числом. Проверим:

$A=35 \Rightarrow D = 42^2-4\cdot 7\cdot 35 = 7\cdot 7\cdot 2\cdot 2(9-5) \Rightarrow \sqrt{D}$ – нецелое число.

Аналогично проверяем ост. числа из нашего множества. Подходят только числа 56 и 63.

При $A = 56$:

1) $D = 42^2 - 28 \cdot 56 = 196$

$\sqrt{D} = 14$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 4 \\ y_2 = 2 \end{array} \right.$

2) $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 23$

Результатом метода подбора (подстановки чисел) мы можем сделать вывод, что целых значений x и z, которые удовлетворили бы условию, не сущ.

Ответ: нет целых корней.

При $A = 63$:

1) $D = 42^2 - 28 \cdot 63 = 0$

$\sqrt{D} = 0$

$\left[\begin{array}{l} y_1 = 3 \\ y_2 = 3 \end{array} \right.$

2) $2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 = 30$

Аналогично

№2.

$$2^{\lg(x^2-2023)} - \lg 2^{x^2-2022} = 0$$

$$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022} = (x^2-2022)\lg 2$$

$$\log_2 2^{\lg(x^2-2023)} = \log_2 \left[(x^2-2022) \cdot \lg 2\right]$$

$$\lg(x^2-2023) = \log_2(x^2-2022) + \cancel{\lg}\ \log_2 \lg 2$$

О.Д.З. 1) $x^2 - 2023 > 0$

$+ \quad -\sqrt{2023} \quad - \quad \sqrt{2023} \quad +$

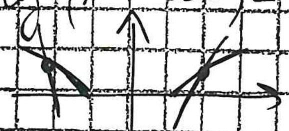
2) $2^{x^2-2022} > 0$

$x \in R$

Область опр:

$x \in (-\infty; -17\sqrt{7}) \cup (17\sqrt{7}; +\infty)$.

График:



Ответ: 2

№3.

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \geq 1$$

$$\frac{2(ab + ac + 2a^2 + bc + ba + 2b^2 + ca + cb + 2c^2)}{3(b+c)(a+c)(a+b)} \geq 1$$

скобы

Шифр 07461

$$\frac{2(2ab+2ac+2bc+2a^2+2b^2+2c^2)}{3(b+c)(a+c)(a+b)} \geqslant 1$$

$$4(a(b+c)+b(c+b)+a^2+c^2) = 4((b+c)(a+b)+a^2+c^2)$$

$$4((b+c)(a+b))+a^2+c^2 \geqslant 3(b+c)(a+c)(a+b)$$

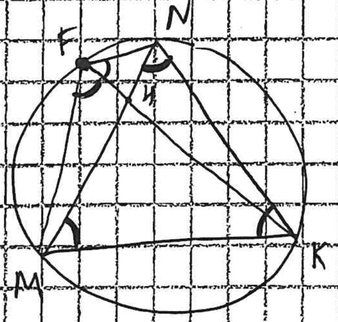
при положительных a, b, c неравенство выполняется.

доказано.

№5.

Дано: $\triangle MNK$ – правильн.

Док-ть: $FM^4+FN^4+FK^4 = const$



Решение:

1) Пусть $MN=NK=KM=a$.

$FK \cap MN = H$

2) $\triangle FHM \sim \triangle NHK$ (по двум углам: $\angle MNK = \angle MFK$ (опир. на $\cup MK$); $\angle FHM = \angle NHK$ (как верт.))

Аналогично $\triangle FNH \sim \triangle MKH$.

3) $2R = \frac{a}{\sin 60^\circ} \Rightarrow R = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

4) Если т. F совп. с вершиной N, то $FM^4+FN^4+FK^4 = a^4+a^4+0 = 2a^4$

5) Можно опис. окр-ть $\Rightarrow \angle FNK + \angle FMK = \angle MFN + \angle MKN = 180^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FMN + \angle FNM = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

6) Если $FK \perp MN$, то $FK = 2R = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$, $FN = FM = \frac{FK}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

$$FM^4+FN^4+FK^4 = 2\cdot\frac{3^2a^4}{3^4} + \frac{2^4\cdot 3^2}{3^4}a^4 = \frac{a^4(2+16)}{3^2} = 2a^4$$

7) Мы увидели, что при движении точки F от вершины тр-ка до середины дуги, образованной стороной тр-ка, значение нашего выражения не изменилось и осталось равным $2a^4$ $\Rightarrow$ также будет при любом положении точки на окр-ти, т.к. далее идут аналогичные случаи, потому что наш треугольник правильный.

доказано.

5б

скобы

Шифр 7461

№4.

многочлен $ax^3 - ax^2 + bx + b$ имеет корни x_1, x_2, x_3 $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = (x_1 x_2 + x^2 - x x_2 - x x_1)(x - x_3) =$$

$$= x^3 - x_3 x^2 - x_2 x^2 + x x_2 x_3 - x_1 x^2 + x x_1 x_3 + x_1 x_2 x - x_1 x_2 x_3 =$$

$$= x^3 - x^2(x_3 + x_2 + x_1) + x(x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2) - x_1 x_2 x_3$$

Значит: $a = 1$, $a = x_3 + x_2 + x_1$ $\Rightarrow$ $x_3 + x_2 + x_1 = 1$

$b = x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2$, $b = -x_1 x_2 x_3$ $\Rightarrow$ $x_2 x_3 + x_1 x_3 + \frac{x_1 x_2}{\cancel{x_1 + x_2}} = -x_1 x_2 x_3$

Распишем:

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = \frac{x_2 x_3 + x_1 x_3 + x_1 x_2}{x_1 x_2 x_3} = \frac{-x_1 x_2 x_3}{x_1 x_2 x_3} = -1$$

(исходя из решений выше)

Можем сделать вывод, что справедливо неравенство:

$$(x_1 + x_2 + x_3)\cdot\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right) = -1$$

$$1 \cdot (-1) = -1$$

$$-1 = -1$$

доказано.

7б