ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

04474

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	С Т Е Р Ж А Н О В А
	Имя	В И Т А Л И Я
	Отчество	П А В Л О В Н А
5.	Дата рождения	0 5 (число) 0 4 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Калининградская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Калининград
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ лицей №23

004474

Итого

23 б

Задача №2

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\cdot\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+$
$+2020\cdot\cos^9(4x)$

1) Заметим, что левая и правая часть уравнения представляют собой функцию:

$f(t)=t+t^5+2020\cdot t^9$

Слева $t_1=\sin(2x)$, справа $t_2=\cos(4x)$.

2) Найдём производную ф-ции:

$$f'(t)=\underbrace{1+\underbrace{5t^4}_{\geq 0}+\underbrace{2020\cdot 9\cdot t^8}_{\geq 0}}_{>0}$$

1	2	3	4	5
4	7	5	0	7

Заметим, что производная всегда положительна => => $f(t)$ - монотонно возрастающая функция.

3) По св-ву монотонно возрастающей функции(*):

$\sin(2x)=\cos(4x)$.

(*) т.е., т.к. ф-ция монотонно возрастает, она может принимать определённое значение только один раз, поэтому t_1 и t_2 должны совпасть.

4) $\sin(2x)=\cos(4x)$

$\sin(2x)=1-2\sin^2(2x)$

$2\sin^2(2x)+\sin(2x)-1=0$

$(\sin(2x)-\frac{1}{2})(\sin(2x)+1)=0$

7 б

$$\left[\begin{array}{l}\sin(2x)=\frac{1}{2}\\ \sin(2x)=-1\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}2x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{6}+\pi k, k\in\mathbb{Z}\\ 2x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x=(-1)^k\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2}, k\in\mathbb{Z}\\ x=-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Ответ: $x = (-1)^k \cdot \frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}$, $k \in Z$;

$x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

Задача №1

Ответ: нет, не существует.

Решение:

1) $a_1 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$

$a_2 = x - \frac{1}{x}$; a_1, a_2 и $a_3 \in \mathbb{Z}$

$a_3 = \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

2) Заметим, что $a_1 = -a_3 \Rightarrow$ если $a_1 \in \mathbb{Z}$, то и $a_3 \in \mathbb{Z}$ или если $a_3 \in \mathbb{Z}$, то и $a_1 \in \mathbb{Z}$.
Т.е. необходимо понять, могут ли быть одновременно a_2 и a_3 целыми.

~~3) Если a_2 и a_3 – целые, то $a_2 + a_3$ – тоже целое число~~

~~$a_2 + a_3 = x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} = x + \frac{1}{x^2+2021} - \frac{2}{x}$~~

3) Если a_1 и a_2 – целые, то $(a_1 + a_2)$ – тоже целое число:

$a_1 + a_2 = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} + x - \frac{1}{x} = x - \frac{1}{x^2+2021}$

$x - \frac{1}{x}$ и $x - \frac{1}{x^2+2021}$ не могут быть одновременно целыми. $\Rightarrow$ не существует.

Недост. обосн.

4б

Задача № 3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, $n > 1$ и $n \in \mathbb{Z}$

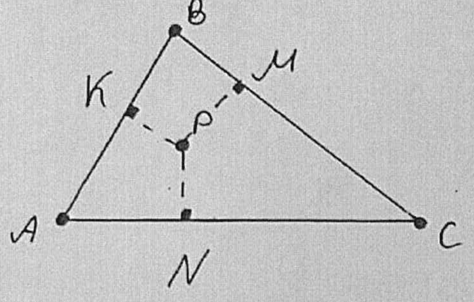
Ответ: нет, невозможно

Пояснение: Во-первых, $p(t)$ - многочлен, где степени при 2-х из 3-х членов отличаются на один (вид: $ax^n + bx^{n-1} + c$). Соответственно, (*) в большинстве случаев невозможно подобрать такие множители, чтобы степени отличались на один. Во-вторых, рассмотрим коэффициенты. ~~[illegible] простые~~ 5 и 3 невозможно разложить на слагаемые так, чтобы можно было вынести общий множитель. В-третьих, заметим такие, что многочлен $p(t)$ невозможно разложить на множители вида $(t-a)(t-b)\ldots$, т.к. ~~[illegible]~~ если у $p(t)$ есть целый ~~делитель~~ корень, то он принадлежит делителям свободного члена, т.е. 3. 3-простое число. 3: ± 1 и ± 3. Среди этих чисел нет целого корня.

Недост. обосн.

5 б

Задача №5



$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ - min

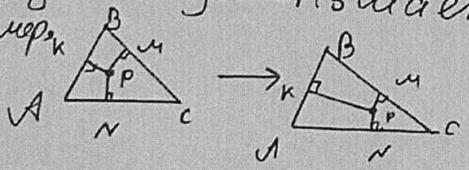
Решение:

1) т.к. BC, AC и AB - стороны заданного $\triangle ABC$, то их величины неизменны:
$BC = const$, $AC = const$ и $AB = const$.

2) Тогда, чтобы сумма была минимальна, необходимы наибольшие знаменатели (т.е. PM, PN и PK - max).

3) Заметим, что при увеличении одного из отрезков (PM, PN или PK), другой уменьшается:

Например,



$PK\uparrow$, но MP и $PN\downarrow$.

7 б

Получается, уменьшае одно из слагаемых, мы увеличиваем другое. Следовательно, наиболее оптимальный вариан и минимальное значение суммы при $PN = PM = PK$, т.е. если P - центр вписанной окр. (точка пересечения биссектрис).

Ответ: P - центр вписанной окружности.