ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004475

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	С Т А Р Ц Е В А
	Имя	М А Р И Я
	Отчество	Е В Г Е Н Ь Е В Н А
5.	Дата рождения	2 9 (число) 0 1 (месяц) 2 0 0 4 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБНОУ "Лицей 84 им. В. А. Власова"

004475

Стариева Мария олимпиада ОРМО 11 класс математика

1) $\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$; 2) $x - \frac{1}{x}$; 3) $\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x}$

№1 = нет

заметим, что при умножении первого выражения (-1) мы получаем третье выражение

тогда:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ - целое

пусть $x - \frac{1}{x} = a$, $a \in Z$

$\frac{1}{x} = x - a$

графиком $\frac{1}{x}$ является гипербола, и графиком $x-a$ = прямая т.к. $\frac{1}{x}$ симметр. относительно точки $(0;0)$ то можно сделать замену $x = m^t$, $t \in N$

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = ? \frac{1}{2m} - \frac{1}{x^3+2021} = \frac{1}{2m} - \frac{1}{2m^{2t}+2021}$

$\frac{1}{m^t} - \frac{1}{m^{2t}+2021} = b$, $b \in Z$

$\frac{1}{m^t+2021} = \frac{1}{m^t} - b = \frac{1-bm^t}{m^t}$

$m^t = (1-bm^t)(m^{2t}+2021)$

пусть $m^t = z$, $z > 0$

$z - (1-bz)(z^2+2021) = z - (1-bz)(z^2+2021) =$

$= z - (z^2 + bz^3 + 2021 + 2021bz) = z - z^2 + bz^3 - 2021 - 2021bz$

все ~~данные~~ получившиеся кубич. уравн. имеют корни, то $z_1 + z_2 + z_3 = -1$, т.к. $z = m^t > 0$

=> не сущ. таких x.

1	2	3	4	5
5	5	1	5	7

Итого 23 б

Нерол. обосн.

004475

№ 2

$\sin 2x + \sin^5 2x + 2020 \cdot \sin^9(2x) = \cos 4x + \cos^5 4x + 2020 \cdot \cos^9 4x$

пусть $\sin 2x = t$, $\cos 4x = y$

$t + t^5 + 2020 t^9 = y + y^5 + 2020 y^9$

заметим, что $t = y$ =>

$\sin 2x = \cos 4x$

$\sin 2x = \cos^2 2x - \sin^2 2x$

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

пусть $\sin 2x = p$

$p = 1 - 2p^2$

$2p^2 + p - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} p_1 = \frac{1}{2} \\ p_2 = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2x = \frac{1}{2} \\ \sin 2x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x = \frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in Z \\ x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z \end{array}\right.$

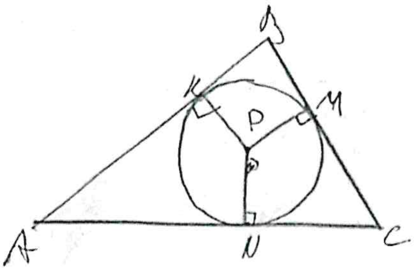
Ответ: $\frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$; $\frac{5\pi}{12} + \pi m, m \in Z$; $\frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Недост. обосн.

5 б

004475

№5



$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} \to \min$$

пусть $AC=y$; $BC=x$; $AB=z$

$$\frac{x}{PM}+\frac{y}{PN}+\frac{z}{PK} \geq 3\sqrt[3]{\frac{xyz}{PM\cdot PN\cdot PK}}$$

$\Rightarrow \frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ min, если выполнено неравенство.

Это выполняется в том случае, если $\triangle ABC$ - равносторонний, т.е. $x=y=z$ и $PM=PN=PK$ (т.к. все данные отрезки являются радиусом r вписанной в $\triangle ABC$ окружности)

7 б

$\Rightarrow \frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет минимальна, если P - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности

Ответ: сумма минимальна при P - центр вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

$n-3$

$P(t)=t^n+5t^{n-1}+3$

$P(t)=t^{n-1}\left(t+5+\frac{3}{t^{n-1}}\right)=t^{n-1}\left(t+5+\frac{3t}{t^n}\right)=t^{n-1}\left(t+5+3t^{1-n}\right)$;

$1-n<0$ при $n>1$. Это противоречит условию положит. степени $\Rightarrow P(t)$ нельзя разложить на произведение многочленов положит. степени с целым коэфф., т.к. степень всегда будет отриц. числом

1 б

Некорр. док.

Ответ: нет, нельзя

№ 4

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot(x^2+\sqrt[3]{2020^4})} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

пусть $x^3=t$; $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x=a$; $a>0$ и $x>0$ (т.к. $x>0$ по усл.)

$$\frac{t}{m+a} \le \frac{3}{2} - \frac{m}{a+t} - \frac{a}{m+\cancel{t}}$$

$$\frac{t}{m+a} + \frac{m}{a+t} + \frac{a}{m+t} \le \frac{3}{2}$$

$$\frac{t}{m+a} + \frac{m}{a+t} + \frac{a}{m+t}$$ при $a=m=t$ $\frac{3}{2}$ - мин. зн.

нет обоснования.

$$\begin{cases} \frac{t}{m+a} + \frac{m}{a+t} + \frac{a}{m+t} \ge \frac{3}{2} \\ \frac{t}{m+a} + \frac{m}{a+t} + \frac{a}{m+t} \le \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{t}{m+a} + \frac{m}{a+t} + \frac{a}{m+t} = \frac{3}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \underline{a=t=m}$

$x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x = m$

$x^2 = \sqrt[3]{2020^4}$

$m = x^3 = 2020^2$

$m = 4080400$

Ответ: при $m=4080400$

5 б