07570

ТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

заключительного этапа

Шифр

мет	Математика
нт	1
	11
лия	СОКОЛОВСКИЙ
	СТЕПАН
тво	ПАВЛОВИЧ
рождения	31 (Число) 05 (Месяц) 2005 (Год)
а	Российская федерация
н *(пр: Томская обл., инградская область)*	Красноярский край
ниципального образования *п, деревня, село, город)*	город
енный пункт *(пр: Томск, ово, Псков)*	Железногорск
е наименование овательного учреждения, ром Вы обучаетесь в е время	КГАОУ Школа Космонавтики.

асие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail зультатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Шифр 07570

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
28	26.03	Корякина Е.Е.	[illegible]

1	2	3	4	5	Σ
6	3	7	7	5	28

№ 3.

$$\frac{2a}{3(b+c)} + \frac{2b}{3(a+c)} + \frac{2c}{3(a+b)} \overset{?}{\geq} 1$$

$$\begin{cases} x = a+b>0 \\ y = b+c>0 \\ z = a+c>0 \end{cases}$$ тогда имеем: $\frac{x+z-y}{3y} + \frac{x+y-z}{3z} + \frac{y+z-x}{3x} \overset{?}{\geq} 1 \overset{\cdot 3}{\Leftrightarrow}$

$$\Leftrightarrow \frac{x+z-y}{y} + \frac{x+y-z}{z} + \frac{y+z-x}{x} \overset{?}{\geq} 3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x+y}{z} + \frac{x+z}{y} + \frac{y+z}{x} \overset{?}{\geq} 6$$

По нер-ву Коши между ср. арифм. и геом. имеем: для чисел $\frac{x}{y}$ и $\frac{y}{x}$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}} = 2$; аналогично $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geq 2$; $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 2$

применяя данное нер-во для чисел $\frac{y}{z}$ и $\frac{z}{y}$, $\frac{x}{z}$ и $\frac{z}{x}$ ~~имеем~~, и складывая эти нер-ва имеем:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geq 3\cdot 2 = 6 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \geq 6$ (а это от нас и требовалось).

+

место для скобы

Шифр 07576

№4

По т. Виета для многочлена ax^3-ax^2+bx+b имеем:

x_1, x_2, x_3 - корни этого многочлена.

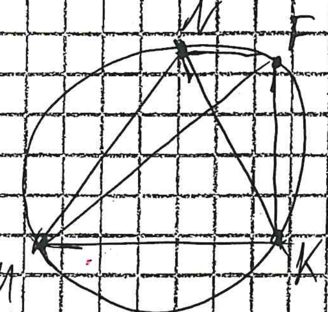
$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=-\frac{-a}{a}=1 \\ x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3=\frac{b}{a} \\ x_1x_2x_3=-\frac{b}{a} \end{cases}$$

Тогда $(x_1+x_2+x_3)\cdot\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=(x_1+x_2+x_3)\cdot\frac{x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3}{x_1x_2x_3}=$

$=1\cdot\frac{\frac{b}{a}}{-\frac{b}{a}}=-1$, что и требовалось.

+

№5.



! $MN=NK=MK=a$;

$FN=x$, $MF=y$, $FK=z$.

(1) По т. Птолемея для впис. четыр-ка MNFK имеем: $MN\cdot FK+NF\cdot MK=MF\cdot NK \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\cdot z+a\cdot x=a\cdot y \Rightarrow y=x+z$ ~~$y^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$~~

(2) По т. косинусов для $\triangle NFK$ имеем: ~~$y^4=x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4$~~

$\angle NFK=180^\circ-\angle NMK=120^\circ$.

$NK^2=FN^2+FK^2-2FN\cdot FK\cdot\cos\angle NFK \Leftrightarrow$

$a^2=x^2+z^2-2\cdot xz\cdot\cos 120^\circ=x^2+z^2+xz$.

(3) Согласно (1) имеем (возвед. в 4 ст-нь): $y^4=x^4+4x^3z+6x^2z^2+4xz^3+z^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (y)^4=(x+z)^4$? пояснение ?

в выражении $x^4+y^4+z^4$ заменим y^4 согласно пункту (3).

№5 (продолжение).

Тогда: $S = x^4 + y^4 + z^4 = FM^4 + FN^4 + FK^4 =$

$= 2x^4 + 4x^3z + 6x^2z^2 + 4xz^3 + 2z^4$,

$\frac{1}{2} \cdot S = x^4 + 2x^3z + 3x^2z^2 + 2xz^3 + z^4 =$

$= (x^2+z^2)^2 + 2xz(x^2+z^2) + x^2z^2 =$

$= (x^2+z^2+xz)^2 = \left[\text{согласно } (2)\right] = (a^2)^2 = a^4$

Тогда $S = 2 \cdot a^4$ и не зависит от выбора точки F

№1

$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{(2x^2+1)(z^2+1)}_{\geq 0} + \underbrace{7y^2 - 42y + 32}_{\leq 0} = 0$

Р-м $f(y)$: $D = 42^2 - 4 \cdot 7 \cdot 32 = 868$, $29^2 < 868 < 30^2$

! y_1, y_2 — корни $f(y)$, тогда: $y_1 < y_2$

$y_1 > \frac{42-29}{14} = \frac{13}{14}$

$y_2 < \frac{42+30}{14} = \frac{72}{14} = 5 + \frac{1}{7}$.

Мин. зн-ие y достигается при $y = y_0 = -\frac{42}{2 \cdot 7} = 3$

$f(3) = 7 \cdot 9 - 42 \cdot 3 + 32 = -31$

Тогда $y \leq +31$

~~№1.~~

~~$7y^2 - 42y + 32 + \underbrace{(2x^2+1)(z^2+1)}_{t} = 0$~~

~~р-м кв. трехчлен отн. y $\quad t \ge 1$~~

~~$D = 42^2 - 4\cdot 7(32+t) \ge 0 \Rightarrow t \le 31 \Rightarrow \begin{cases} x < 3 \\ z < 5 \end{cases}$~~

~~Также т.к. $t \ge 1$, то $D < 30^2$~~

~~при этом D — полный квадрат.~~

~~! $D = k^2$; тогда $42^2 - k^2 = 28(32+t)$~~

~~$42^2 - k^2 \,\vdots\, 28$; $\underbrace{(42-k)(42+k)}_{A} \,\vdots\, 28$~~

~~$42^2 - k^2 \le 28\cdot 31$; $k^2 \ge 42^2 - 31\cdot 28 = 896$~~

~~$k = \dots$~~

№1.

$2x^2 + 2x^2z^2 + z^2 + 7y^2 - 42y + 33 = 0 \Leftrightarrow$

$\underbrace{7y^2 - 42y + 32}_{f(y)} = \underbrace{-(2x^2+1)(z^2+1)}_{<0}$?

Р-м кв. трехчлен $7y^2 - 42y + 32$

$\Rightarrow D = 42^2 - 4\cdot 32\cdot 7 = 868$; $29^2 < 868 < 30^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y_1, y_2$ — корни лев. части, тогда ($y_1 < y_2$)

$\begin{cases} y_1 > \frac{42-29}{14} = \frac{13}{14} \\ y_2 < \frac{42+30}{14} = 5\frac{1}{7} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y_1 \le y \le y_2 \\ y \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow 1 \le y \le 5 \Rightarrow$

переберем возможные зн-ия y

№1 (продолжение).

$y=1$.

$f(1)=7\cdot1-42+32=-3=-(2x^2+1)(z^2+1)$

! $z^2+1=1 \Rightarrow z=0$, $2x^2+1=3 \Rightarrow x=\pm1$

$(x,y,z)=(\pm1,1,0)$; ! $z^2+1=3$, $z^2=2$, $\Rightarrow z\notin\mathbb{Z}$ нецел

$y=2$.

$f(2)=7\cdot4-42\cdot2+32=28+32-84=-24=-\underbrace{(2x^2+1)}_{\vdots 2}(z^2+1)$ $-3\cdot8$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+1=1\\2x^2+1=3\end{array}\right.$

1) $2x^2+1=3$, $x=\pm1 \Rightarrow$

$\Rightarrow z^2+1=8$, $z^2=7 \Rightarrow z$ - нецел. $z\notin\mathbb{Z}$

2) $2x^2+1=1$, $x=0$; $z^2+1=24$, $z^2=23 \Rightarrow z\notin\mathbb{Z}$

реш. при $y=2$ нет

$y=3$.

$f(3)=7\cdot9-42\cdot3+32=63+32-126=-31=-\underbrace{(2x^2+1)}_{\not\vdots 2}(z^2+1) \Rightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2+1=1\\2x^2+1=31\end{array}\right.$

1) $2x^2+1=1$, $x=0$; $z^2+1=31 \Rightarrow z\notin\mathbb{Z}$ реш. нет.

2) $2x^2+1=31$, $x^2=15 \Rightarrow x\notin\mathbb{Z}$ - реш. нет.

$y=4$.

$f(4)=7\cdot16-42\cdot4+32=112+32-168=144-168=-24$ - реш. нет (см. случай $y=2$).

$y=5$

$f(5)=7\cdot25-42\cdot5+32=-3 \Rightarrow$ реш-ия совп-т со случаем $y=1$

Тогда $(x,y,z)=(\pm1,1,0)$ - ед-ое реш-ие.

Отв: $(x,y,z)=(1,1,0)$; $(x,y,z)=(-1,1,0)$ (два реш-ия)

№2

$$2^{\lg(x^2-2023)} = \lg 2^{x^2-2022}$$

Пусть $t = \lg(x^2-2023)$, тогда

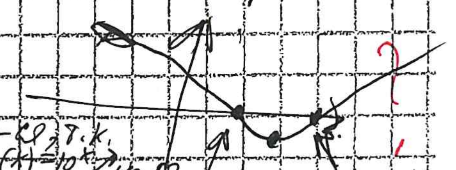
$2^t = \lg 2^{10^t+1} = (10^t+1)\cdot\lg 2$. Введём $f(t)$:

$f(t) = 10^t \lg 2 - 2^t + \lg 2 = 0$. ← по усл

$f'(t) = \ln 10\cdot 10^t\cdot\lg 2 - \ln 2\cdot 2^t = \underbrace{2^t}_{\neq 0}(5^t\cdot\ln 10\cdot\lg 2 - \ln 2) = 0;$

$5^{t_0} = \dfrac{\ln 2}{\ln 10\cdot\lg 2} > 0 \Rightarrow t_0 \in \mathbb{R} \Rightarrow f'(t)$ имеет 1 корень $\Rightarrow$

$\Rightarrow f(t)$ имеет не более 2 корней.



* далее при экспоненцировании неравенств по осн. 10 знак сохр-ся, т.к. $g(x)=10^x \nearrow$ на $\mathbb{R}$.

(1) р-м $f(1)$: $f(1) = 11\lg 2 - 2 > 0 \Leftrightarrow$

$\lg 2 > \frac{2}{11} \Rightarrow 2 > 10^{\frac{2}{11}}$; $\underset{2048}{2^{11}} > 100$ ✓

(2) $f(0) = 2\cdot\lg 2 - 1 < 0$; $\lg 2 < \frac{1}{2} \Rightarrow 2 < \sqrt{10}$; $4 < 10$ ✓

3) $f(-100) = \lg 2\cdot\left(\frac{1}{10^{100}}+1\right) - \frac{1}{2^{100}} > 0$; $\lg 2\left(1+\frac{1}{10^{100}}\right) > \frac{1}{2^{100}}$

Действительно, т.к. $\lg 2 > \frac{2}{11}$ (см. пункт (1)) и

$\lg 2\cdot\left(1+\frac{1}{10^{100}}\right) > \lg 2$ и

$\frac{2}{11} > \frac{1}{2^{100}}$ $\left(2^{101} > 2^4 > 11\right)$, то

$\lg 2\cdot\left(1+\frac{1}{10^{100}}\right) > \frac{1}{2^{100}}$ ✓

Тогда из-за пунктов (1,2,3), $\begin{cases} f(1) > 0 \\ f(0) < 0 \\ f(-100) > 0 \end{cases}$ в силу непрерывности $f(t)$ $\Rightarrow f(t)$ имеет корень t_1: $0 < t_1 < 1$, и корень t_2: $-100 < t_2 < 0$, а т.к. $f(t)$ имеет не больше 2 корней, то найденные t_1 и t_2 — единственные. Отв. 2 корня