Место для скобы

003996

Шифр

# ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

## ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
### заключительного этапа

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Предмет | Математика |
| 2. | Вариант | 2 |
| 3. | Класс | 11 |
| 4. | Фамилия | СКВОРЦОВА |
| | Имя | ДАРЬЯ |
| | Отчество | АЛЕКСЕЕВНА |
| 5. | Дата рождения | Число: 27; Месяц: 07; Год: 2003 |
| 6. | Страна | россия |
| 7. | Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)* | Томская область |
| 8. | Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)* | город |
| 9. | Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)* | Томск |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь | МБОУ Лицей при ТПУ |

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

*Личная подпись* Ск

Место для скобы

Шифр 003996

**Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)**

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| 23б | 15.04.21 | Гендрико И.Ю. | [illegible] |

№2. $\sin x+\sin^3 x+2021\cdot\sin^5 x=\cos(2x)+\cos^3(2x)+2021\cdot\cos^5(2x)$

Заметим, что ур-е представляет собой выражение вида: $f(t_1)=f(t_2)$, где $f(t)=t+t^3+2021t^5$

Недост. обосн. 6б

$t_1=\sin x$

$t_2=\cos(2x)$. Тогда исходное уравнение равносильно:

$t_1=t_2 \Rightarrow \sin x=\cos(2x)$

$\sin x=1-2\sin^2 x$

$2\sin^2 x+\sin x-1=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin x=-1\\ \sin x=\frac{1}{2}\end{array}\right.\quad \left[\begin{array}{l}x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\\ x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|
| 7 | 6 | 0 | 5 | 5 |

Ответ: $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$;

$x=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in\mathbb{Z}$.

№1. $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2020}=\frac{x^2-x+2020}{(x^2+2020)x}$; (1)

$x-\frac{1}{x}=\frac{x^2-1}{x}$; (2)

$\frac{1}{x^2+2020}-\frac{1}{x}=\frac{-x^2+x-2020}{x(x^2+2020)}$ (3)

Примечание: $x\neq 0$. Заметим, что $x$ не может быть дробным,

т.к. очевидно, что (1) или (3) не будут целыми.

Р-м выражение (2):

$\frac{x^2-1}{x}$ принимает целое значение лишь при $x=1;-1$: $\frac{1-1}{1}=0\in\mathbb{Z}$; $\frac{1-1}{-1}=0\in\mathbb{Z}$.

Использ. метод мат. индукции:

Пусть $x=2$: $\frac{4-1}{2}=\frac{3}{2}\notin\mathbb{Z}$

Предположим, что для $x=k$ выражение $\frac{k^2-1}{k}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow$

$\Rightarrow\frac{(k-1)(k+1)}{k}\notin\mathbb{Z}\Rightarrow k-1 / k$ и $k+1 / k$ (*) 7б

Тогда для $x=k+1$: $\frac{(k+1)^2-1}{k+1}=\frac{k^2+2k+1-1}{k+1}=\frac{k^2+2k}{k+1}=\frac{k(k+2)}{k+1}$

Заметим, что $k$ не может делиться на $k+1$.

А $k+2$ не делится на $k+1$, т.к. $k+1$ не делится на $k$ (из выражения (*)) => для всех $x\geq 2$. Выражение (2) является дробным.

см. след. стр.

Место для скобы

Шифр 003996

Подставим $x=1$ в (1) и (3) выражение:

(1): $\frac{1-1+2020}{(1+2020)1} = \frac{2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$

(3): $\frac{-1+1-2020}{1(1+2020)} = \frac{-2020}{2021} \notin \mathbb{Z}$

Примечание: Я рассмотрела натуральные x, но это не доказательно ~~и~~ справедливо и для всех обратных им чисел. Числа (1) и (3) ~~[illegible]~~ поменяются ~~[illegible]~~ ~~се местами~~, т.к. они обратные.

Следовательно, не существует таких ~~[illegible]~~ чисел x, что все три числа (1), (2) и (3) ~~[illegible]~~ целыми.

Ответ: Нет, не существует

№4. $k>0$ $\quad \frac{x^3}{k+\sqrt[3]{2021^4}\cdot x} + \frac{\sqrt[3]{2021^4}\,x}{k+x^3} \le \frac{3}{2} - \frac{k}{x^3+\sqrt[3]{2021^4}x}$

Пусть $x^3 \overset{\text{об}}{=} t$; $\sqrt[3]{2021^4}\cdot x \overset{\text{об}}{=} p$

$\frac{t}{k+p} + \frac{p}{k+t} \le \frac{3}{2} - \frac{k}{t+p}$ Заметим, что ~~[illegible]~~ Нер-во инвариантно относительно замены t на p.

$$\frac{2t(k+t)(t+p)+2p(k+p)(t+p) - 3(t+p)(k+p)(k+t) + 2k(k+t)(k+p)}{(k+p)(k+t)(t+p)} \le 0$$

$$\frac{2t(kt+kp+t^2+pt)+2p(kt+kp+pt+p^2) - 3(t+p)(k^2+kt+pk+pt) + 2k(k^2+kp+kt+pt)}{(k+p)(k+t)(t+p)} \le 0$$

$$\frac{2tk^2+2tkp+2t^3+2pt^2+2pkt+2p^2k+2p^2t+2p^3-3(tk^2+kt^2+tpk+pt^2+pk^2+pkt+p^2k+p^2t)+ +2k^3+2k^2p+2k^2t+2pkt}{-//-} \le 0$$

$$\frac{t^2(2t-3k-3p+2p+2k) + p^2(2k+2t+2p-3k-3t) + k^2(-3t-3p+2k+2p+2t)+ptk}{-//-} \le 0$$

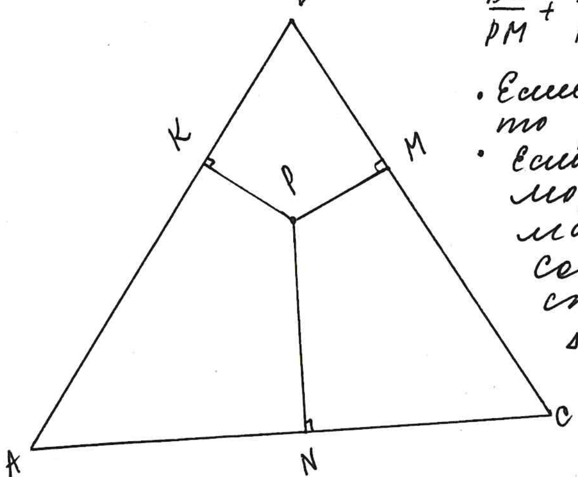
$$\frac{t^2(2t-p-k)+p^2(2p-k-t)+k^2(2k-p-t)+ptk}{-//-} \le 0$$

$\left[\begin{array}{l} t=k \\ p=t \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} k=x^3 \\ x^3=x\sqrt[3]{2021^4} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} k=2021^2 \\ x=\sqrt[3]{2021^2} \end{array}\right.$ – возможное значение k

Ответ: $k=2021^2$ – одно из значений k

5б недост. обоснование

№5.




$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ – минимальна.

- Если все стороны треугольника равны, то p – центр вписанной окр-ти.
- Если $\triangle ABC$ – произвольный. То необходимо, чтоб $\rho$ (P, ~~[illegible]~~ стор. $\triangle$) было максимальным для самой большой сторон. Соответственно для меньших сторон расстояние между т. P и стор. $\triangle ABC$ должно быть меньше.
- Заметим, что вокруг четырёхугольников KPMB, NMCP, ANPK можно описать окружность, т.к. $\angle PMC + \angle PNC = 180°$, $\angle PKA + \angle PNA = 180°$, $\angle BKP + \angle BMP = 180°$ (т.к. PM, PK, PN – перпендикуляры)

Тогда т. P – точка пересечения трёх окружностей

Требуется уточнение

5б