**ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА**
**ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»**

004514
Шифр

## ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Предмет | Орг. документы |
| 2. | Вариант | Математика 10 класс Вариант 3 закл |
| 3. | Класс | 10 |
| 4. | Фамилия | С И М У Ш И Н |
| | Имя | П А В Е Л |
| | Отчество | С Е Р Г Е Е В И Ч |
| 5. | Дата рождения | 13 (число) 01 (месяц) 2004 (год) |
| 6. | Страна | Россия |
| 7. | Регион (пр: Томская обл., Алтайский край) | Чувашская республика - Чувашия |
| 8. | Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня) | Город |
| 9. | Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков) | Чебоксары |
| 10. | Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь | МАОУ "Гимназия №5" г. Чебоксары |

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | $\Sigma$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 7 | 5 | 7 | 3 | 7 | 29 |

Место для скобы

Шифр 004514

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

| Общий балл | Дата | Ф.И.О. членов жюри | Подписи членов жюри |
|---|---|---|---|
| | | | |

2.

$$\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y & (1) \\ -5xy+4yz+xz=-4y & (2) \\ xy+yz=-y & (3) \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая:

I $y=0$:

~~(3): $x+z=-1 \Rightarrow$~~

(2): $xz=0$

(1) $xz=0$

$\Rightarrow \left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ z\in R \end{cases} \\ \begin{cases} z=0 \\ x\in R \end{cases} \end{array} \right.$

Значит, в этом случае есть решение $\left[ \begin{array}{l} \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ z\in R \end{cases} \\ \begin{cases} x\in R \\ y=0 \\ z=0 \end{cases} \end{array} \right.$

II: $y\neq 0$

(3): $x+z=-1 \Rightarrow x=-(z+1)$; $z=-(x+1)$

(2): $4yz+xz=5xy-4y$

$z(4y+x)=y(5x-4)$

$-(x+1)(4y+x)=y(5x-4)$

$\frac{4y+x}{y}=\frac{4-5x}{x+1}$

$4+\frac{x}{y}=\frac{4-5x}{x+1}$

$\frac{x}{y}=\frac{4-5x-4x-4}{x+1}$

$\frac{x}{y}=\frac{-9x}{x+1}$

Рассмотрим 2 случая:

II.I. $x=0$:

(2)(3): $\begin{cases} yz+y=0 \\ 5yz+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases} z=-1 \\ z=-\frac{3}{5} \end{cases}$ – противоречие.

значит, такой случай невозможен

Место для скобы

Шифр 104514

II. II. $x \neq 0$

$-9y = x+1 \Rightarrow x = -9y - 1$

$(2): \; 4y(z+1) = x(5y - z)$

$4yz + 4y = (9y+1)(z-5y)$

$4yz + 4y = 9yz - 45y^2 + z - 5y$

$45y^2 + 9y = 5yz + z$

$\Leftrightarrow 9y(5y+1) = z(5y+1)$

II. II I $\quad y = -\frac{1}{5}$

$(1): \; xz = y(3x - 5z - 3)$

$5xz = 3 + 5z - 3x$

$x(3+5z) = 3 + 5z \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ z \neq -\frac{3}{5} \end{cases} \\ z = -\frac{3}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow$

Проверка.

$-\frac{3}{5} \cdot 2 + 2 = -\frac{3}{5}$ ~~подходит~~

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ z = -2 \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\frac{2}{5} \\ z = -\frac{3}{5} \\ y = -\frac{1}{5} \end{cases} \end{array}\right.$

$\frac{6}{25} + \frac{3}{5} + \frac{6}{25} = -\frac{3}{5}$

Место для скобы

Шифр 004514

$\underline{\text{II}}.\underline{\text{II}}.\underline{\text{II}}: y \neq -\frac{1}{5}$

$$z = 9y$$

$$(2): \quad z(4y+x) = y(5x-4)$$

$$9y(\cancel{\ldots}\ 4y+x) = y(5x-4)$$

$$36y + 9x = 5x - 4$$

$$36y = -4(x+1)$$

$$9y = -x - 1 \Rightarrow x = -(9y+1)$$

$$(1): \quad 3y(x-1) = z(5y+x)$$

$$3y(x-1) = 9y(5y+x)$$

$$3x - 3 = 45y + 9x$$

$$-6x - 3 = 45y$$

$$-2x - 1 = 15y$$

$$x = -\frac{15y+1}{2}$$

$$(3): \quad x + z = -1 \Rightarrow -\frac{15y+1}{2} + 9y = -1$$

$$-15y + 1 + 18y = -2$$

$$3y = -3$$

$$y = -1 \Rightarrow z = -9 \Rightarrow x = 8$$

Ответ: $\{x=0;\ y=0,\ z\in R\}$, $(x\in R;\ y=0;\ z=0)$, $(x=1;\ y=-\frac{1}{5};\ z=-2)$, $(x=-\frac{2}{5};\ y=-\frac{1}{5};\ z=-\frac{3}{5})$; $(x=8;\ y=-1;\ z=-9)$.

Место для скобы

Шифр

3. Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$

$f(0)+f(1)=a\cdot 0+b\cdot 0+c+a+b+c=a+b+2c=0$

$f(2)+f(3)=4a+2b+c+9a+3b+c=13a+5b+2c=0$

$$\begin{cases} a+b+2c=0 & (1) \\ 13a+5b+2c=0 & (2) \end{cases}$$

Рассмотрим ур-ие $f(x)=2022$:

$ax^2+bx+c=2022$

$ax^2+bx+c-2022=0$

$x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c-2022}{a}=0$

По т. Виета сумма корней ур-ия $f(x)=2022$ равна $-\frac{b}{a}$

Вычтем (2) из (1):

$13a+5b-a-b=0$

$12a=-4b \Rightarrow -\frac{b}{a}=3.$

Ответ: 3.

Место для скобы

Шифр

4.

$$\sqrt[2020]{2019\cdot\frac{1}{2020}}+\sqrt[2020]{\frac{1}{2014}\cdot 2020}>2$$

По неравенству о средних

$$\sqrt[2020]{2020}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2020}}>2.$$

Докажем, что $\sqrt[2020]{2019}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2014}}>1$

$$\sqrt[2020]{2014}$$

$$\cancel{\sqrt[2020]{2019}>1}$$

$$2019>1$$

$$\sqrt[2020]{2019}>1$$

$$1-\sqrt[2020]{2019}<0$$

$$\sqrt[2020]{2014}\left(1-\sqrt[2020]{2019}\right)<0<1$$

$$\sqrt[2020]{2014}\cdot\left(\sqrt[2020]{2019}-1\right)>-1 \Updownarrow ?$$

$$\sqrt[2020]{2014\cdot 2019}+1>\sqrt[2020]{2014}$$

$$\sqrt[2020]{2019}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2014}}>1$$

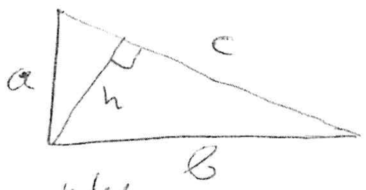
$\boxtimes$

$$\begin{cases}\sqrt[2020]{2020}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2020}}>2\\ \sqrt[2020]{2019}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2014}}>1\end{cases}\Rightarrow\left(\sqrt[2020]{2020}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2020}}\right)\cdot\left(\sqrt[2020]{2019}+\frac{1}{\sqrt[2020]{2014}}\right)>2\Rightarrow)$$

Место для скобы

5.

Шифр




Площадь треугольника S равна, с одной стороны полупроизведению катетов, с другой стороны, полупроизведению высоты на сторону, к которой эта высота проведена:

$$S = \frac{ab}{2} = \frac{ch}{2} \Rightarrow ab = ch$$

Пусть ~~с~~ $c+h<a+b$. Тогда:

$$(c+h)^2<(a+b)^2$$

$$c^2+2ch+h^2<a^2+2ab+b^2$$

$c^2+h^2<a^2+b^2$ (т. к. $ch=ab$ по доказанному)

$c^2+h^2<c^2$ (т. Пифагора: $a^2+b^2=c^2$)

$h^2<0$ – противоречие, ~~зн~~ значит, такого быть не может.

Ответ: Нет

Место для скобы

Шифр

1. Пусть такое число $x$ существует. ~~Тогда~~

Пусть $\sqrt{x^2+2020}$ – не целое.

Тогда, чтобы $\sqrt{x^2+2020}-x$ было целым, $x$ должно быть не целым. Но т.к. $\sqrt{x^2+2020}-x$ – целое, $x$ – не целое, то $\sqrt{x^2+2020}-x-x=\sqrt{x^2+2020}-2x$ – не целое, что противоречит условию. Значит $\sqrt{x^2+2020}$ – целое. Значит, целые также числа $x$, $2x$ и $\sqrt{x^2+2}$, значит, $x^2+2$ – точный квадрат.

Пусть $x^2+2=a^2$, $a\in\mathbb{Z}$, тогда $x^2-a^2=2$, т.е. разница между двумя точными квадратами равна 2 (расстояние на числовой прямой). Но расстояние между соседними точными квадратами $(n+1)^2-n^2=n^2+2n+1-n^2=2n+1>3$ при $n\in\mathbb{N}$, значит, такого быть не может, т.е. такого числа $x$ не существует.

Ответ: Нет.

Место для скобы

Шифр

$$\Rightarrow \sqrt[2020]{2019 \cdot 2020^{-1}} + \sqrt[2020]{2020 \cdot 2014^{1}}$$

$\boxtimes$