Место для скобы

004009

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	математика
2.	Вариант	2
3.	Класс	10
4.	Фамилия	Ш П Р Е Н Г ~~Я~~ Е Р
	Имя	А Л И С А
	Отчество	А Л Е К С А Н Д Р О В Н А
5.	Дата рождения	Число: 1 2; Месяц: 0 5; Год: 2 0 0 5
6.	Страна	Россия
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	Томская область
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	город
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	Томск
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МАОУ СОШ „Перспектива"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e-mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись ____________

Место для скобы

Шифр 004009

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
26б	5.04.21	Гендрина И.Ю.	

№3

$f(0)+f(1)=0$

$f(2)+f(3)=0$

$f(x)=2020$

$x_1+x_2+\ldots+x_n-?$

$f_{(x)}=ax^2+bx+c$

$f(0)=-f(1)$

$a\cdot 0+b\cdot 0+c=-(a\cdot 1+b\cdot 1+c)$

$c=-a-b-c.$

$a+b+2c=0$

$f(2)=-f(3)$

$a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=-(a\cdot 3^2+b\cdot 3+c)$

$4a+2b+c+9a+3b+c=0$

$13a+5b+2c=0$

$\left.\begin{array}{l} a+b+2c=0 \\ 13a+5b+2c=0 \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow a+b=13a+5b$

$12a=-4b.$

$b=-3a$

$a+b+2c=0$

$a-3a+2c=0$

$2c=2a$

$c=a$

$f_{(x)}=ax^2+bx+c=ax^2-3ax+a$ ~~x^2-3x+1~~.

$f(x)=2020 \Rightarrow ax^2-3ax+a-2020=0$

~~$x^2-3x+1=2020 \Rightarrow x^2-3x-2019=0$~~

~~$D=9+4\cdot 2019=9+8076=8085.$~~

~~$x_1=\frac{3+\sqrt{8085}}{2}$~~ ; $x_2=\frac{3-\sqrt{8085}}{2}$.

7б

По теореме Виета:

$ax^2-3ax+(a-2020)=0$

$x_1+x_2=\frac{-(-3a)}{a}=3;$ ~~$x_1+x_2=\frac{3+\sqrt{8085}}{2}+\frac{3-\sqrt{8085}}{2}=\frac{6}{2}=3$~~;

Ответ: $x_1+x_2=3.$

1	2	3	4	5
7	3	7	2	7

Место для скобы

Шифр 004009

№2
$$\begin{cases} 5xy + yz + 2xz = -x & (1) \\ 14xy + 3yz + 5xz = -4x & (2) \\ 2xy + xz = 4x & (3) \end{cases}$$

из (3): $2xy + xz = 4x$

$2y + z = 4 \quad (4)$

из (1) и (2):

$$\frac{5xy + 2xz + x}{14xy + 5xz + 4x} = \frac{-yz}{-3yz}$$

$$\frac{5y + 2z + 1}{14y + 5z + 4} = \frac{1}{3}$$

$15y + 6z + 3 = 14y + 5z + 4$

$y + z = 1 \quad (5)$

3 б

из (4) и (5):

$$\begin{cases} 2y + z = 4 \\ y + z = 1 \end{cases} \quad y + y + z = 4.$$

$y + 1 = 4$;

$y = 3$

$y + z = 1$

$3 + z = 1$

$z = 1 - 3 = -2$;

$y = 3$

$z = -2$

Не все решения потеряны

из (1): $x(5y + 2z + 1) = -yz$

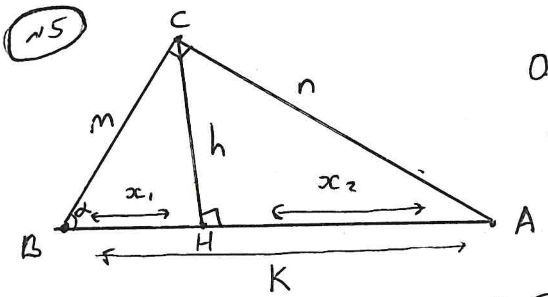
$x(5 \cdot 3 - 2 \cdot 2 + 1) = 2 \cdot 3$

$x(15 - 3) = 6$

$x = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$;

Ответ: $y = 3$, $z = -2$, $x = \frac{1}{2}$;

№5



Обозначим вершины Δ A, B, C; $\angle C = 90°$. Основание высоты h ~~HAK~~ обозначим за H.

Дано:
m, n, k, h
$k + h < m + n$ — ?

Обозначим BH как x_1, а AH как x_2.

7 б

Тогда из свойства высоты прямоуг. Δ: $h^2 = x_1 \cdot x_2 \Rightarrow h = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$.

Обозначим $\angle ABC$ α. Тогда $\cos\alpha = \frac{x_1}{m} = \frac{m}{k}$. (1)

Т.к. $\angle ABC = \alpha \Rightarrow \angle BAC = 90° - \alpha \Rightarrow \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$;

$\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha = \frac{n}{k} = \frac{x_2}{n}$; (2)

Место для скобы

Шифр 004009

Из (1) и (2):

$x_2 = n \cdot \sin\alpha = n \cdot \frac{n}{k} = \frac{n^2}{k}$

$x_1 = m \cos\alpha = \frac{m^2}{k}$ $\qquad h = \sqrt{x_1 \cdot x_2}$

~~Предпол~~

~~k+~~ Предположим, что $k + h < m + n$ – верно.

$m, n, k, h > 0$ (из условия)

Тогда: $k + \sqrt{x_1 \cdot x_2} < m + n$ $\qquad k + \frac{mn}{k} < m + n$

$k + \sqrt{\frac{m^2 \cdot n^2}{k^2}} < m + n$ $\qquad k^2 + mn < \cancel{k} km + kn$

$k^2 - k(m+n) + mn < 0$

$D = (-(m+n))^2 - 4mn = m^2 + 2mn + n^2 - 4mn =$

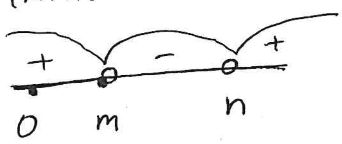
$= m^2 - 2mn + n^2 = (m-n)^2;$

$k_1 = \frac{m+n+\sqrt{(m-n)^2}}{2} = \frac{m+n+m-n}{2} = \frac{2m}{2} = m$

$k_2 = \frac{m+n-\sqrt{(m-n)^2}}{2} = \frac{m+n-m+n}{2} = n;$

Предположим, что $m < n$;

$k^2 - k(m+n) + mn < 0$



$k \in (m; n)$, если $k + h < m + n$ – верно. Но $k > n$ (т.к. k – гипотенуза) $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ $k + h < m + n$ – невозможно.

Ответ: невозможно.

7б

№1 $\exists x$?: $\sqrt{x^2+2020} - x$, $\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2020}$, $2x - \sqrt{x^2+2020} \in \mathbb{Z}$

Предположим, что такое x существует. Тогда:

$$\left.\begin{array}{l} \sqrt{x^2+2020} - x = a \\ \sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+2020} = b \\ 2x - \sqrt{x^2+2020} = c \end{array}\right\} \text{где } a, b, c \text{ – целые числа}$$

(1) $a + x = \sqrt{x^2+2020}$;

(2) $\sqrt{x^2+2} - b = \sqrt{x^2+2020}$;

(3) $2x - c = \sqrt{x^2+2020}$;

Место для скобы

Шифр

~~Тогда~~ Тогда из (1) и (3):

$a+x=2x-c$

$\cancel{x=a+b}$ $x=a+c \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$ (т.к. $a,c\in\mathbb{Z}$)

из (1) и (2): $a+x=\sqrt{x^2+2}-b$

$\sqrt{x^2+2}=a+b+x \Rightarrow \sqrt{x^2+2}\in\mathbb{Z}$ (т.к. $a,b,x\in\mathbb{Z}$).

из (1): $a+x=\sqrt{x^2+2020} \Rightarrow \sqrt{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$ (т.к. $a,x\in\mathbb{Z}$)

Т.к. $\sqrt{x^2+2}\in\mathbb{Z}$ и $\sqrt{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$, то:

$\left.\begin{array}{l}\sqrt{x^2+2}=m\\ \sqrt{x^2+2020}=k\end{array}\right\}$ где m и k – целые числа

$x^2+2=m^2 \qquad x^2-m^2=-2$

$x^2+2020=k^2 \qquad x^2-k^2=-2020$

$x^2=m^2-2=(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})$

$x^2=k^2-2020=(k-\sqrt{2020})(k+\sqrt{2020})$

~~Итак~~

$x\cdot x=(m-\sqrt{2})(m+\sqrt{2})=(k-\sqrt{2020})\cdot(k+\sqrt{2020})$

Но $x,m,k\in\mathbb{Z} \Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$

$\Rightarrow \nexists x:\ \sqrt{x^2+2020}-x,\ \sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020},\ 2x-\sqrt{x^2+2020}\in\mathbb{Z}$

Ответ: Такого x не существует.

№4 $\sqrt[2020]{2020\cdot2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot2019^{-1}}>2$

20

$\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}+\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}>2$

$\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot2019}+\sqrt[2020]{2021^2}}{\sqrt[2020]{2021\cdot2019}}>\frac{2\cdot\sqrt[2020]{2021\cdot2019}}{\sqrt[2020]{2021\cdot2019}}$

Место для скобы

Шифр

$$\frac{\sqrt[2020]{2020\cdot 2019}+\sqrt[2020]{2021^2}-2\cdot\sqrt[2020]{2021\cdot 2019}}{\sqrt[2020]{2021\cdot 2019}}>0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt[2020]{2020\cdot 2019}+\sqrt[2020]{2021^2}-2\cdot\sqrt[2020]{2021\cdot 2019}>0$$

$\cancel{2020 = ax^2 - 3ax + a}$ $\cancel{a+b+2c=0}$

$\cancel{13a+5b+2c=0}$

$\cancel{ax^2 - 3ax + (a-2020)}$ $\cancel{13a-15a+2a=0}$

$\cancel{D = 9a^2 - 4a(a-2020) = 5a^2}$

$\cancel{b=-3a}$

$\cancel{a(x^2-3x+1)}$

$$\sqrt[2020]{2020\cdot 2021^{-1}}+\sqrt[2020]{2021\cdot 2019^{-1}}>2$$

$$2=\frac{2020}{2021}+\frac{2022}{2021}.$$

Ясно что $\sqrt[2020]{\frac{2020}{2021}}>\frac{2020}{2021}$,

$$\sqrt[2020]{\frac{2021}{2019}}=\sqrt[2020]{1+\frac{2}{2019}},$$

$$\frac{2022}{2021}=1+\frac{1}{2021}$$