ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004508

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 10 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	10
4.	Фамилия	ШПАНОВ
	Имя	ДМИТРИЙ
	Отчество	АЛЕКСЕЕВИЧ
5.	Дата рождения	24 (число) 07 (месяц) 2004 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Томская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Село
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	село Чажемто
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ "Чажемтовская СОШ"

1	2	3	4	5	Σ
~~6~~ 7	7	7	7	7	~~35~~ 35

Место для скобы

Шифр 004508

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри

1) Пусть такое число x существует $\Rightarrow \sqrt{x^2+2020}-x \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+2020} \in \mathbb{Z}$, $2x-\sqrt{x^2+2020} \in \mathbb{Z}$. Сумма целых чисел - целое число $\Rightarrow$

$\sqrt{x^2+2020}-x+2x-\sqrt{x^2+2020}=x \in \mathbb{Z}$, $\sqrt{x^2+2020} \in \mathbb{Z}$; $\sqrt{x^2+2} \in \mathbb{Z}$.

Пусть $a=\sqrt{x^2+2020}$, $b=\sqrt{x^2+2}$, тогда $a>b$ и $a^2-b^2=x^2+2020-x^2-2=2018$

$\Rightarrow (a-b)\cdot(a+b)=2018$. У числа 2018 4 делителя целых: 1, 2, 1009, 2018.

$\begin{cases} a-b=2 \\ a+b=1009 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=2+1009 \\ b=a-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=505,5 \\ b=503,5 \end{cases}$; $\begin{cases} a-b=1009 \\ a+b=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1009+2 \\ b=-a+2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=505,5 \\ b=-503,5 \end{cases}$;

$\begin{cases} a-b=1 \\ a+b=2018 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=1+2018 \\ b=a-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1009,5 \\ b=1008,5 \end{cases}$; $\begin{cases} a-b=2018 \\ a+b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a=2018+1 \\ b=-a+1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1009,5 \\ b=1008,5 \end{cases}$.

Числа „a" и „b" всегда дробные, но по условию должны быть целыми. Противоречие, значит подходящего x не существует.

Ответ: нет

2) $\begin{cases} 3xy-5yz-xz=3y \\ -5xy+4yz+xz=-4y \\ xy+yz=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3xy-5xy-5yz+4yz+xz-xz=3y-4y \\ xy+yz=-y \\ 3xy-5yz-xz=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2xy-yz=-y \\ xy+yz=-y \\ 3xy-5yz-xz=3y \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} -2xy+xy-yz+yz=-2y \\ 3xy-5yz-zx=3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -xy=-2y \\ 3xy-5yz-xz=3y \end{cases}$. При $y=0$: $3x\cdot 0-5z\cdot 0-3\cdot 0-x\cdot z=0$

При $y\neq 0$: $\begin{cases} -x=-2 \\ 3xy-5yz-xz=3y \\ xy+yz=-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ 2+z=-1 \\ 3xy-5yz-xz-3y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=-3 \\ 3\cdot 2y-5(-3)y-3y=-3\cdot 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=-3 \\ 18y= \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ z=-3 \\ y=-\frac{1}{3} \end{cases}$. Ответ: $x=2, y=-\frac{1}{3}, z=-3$; $y=0, x=0, z$ - любое число; $y=0, z=0, x$ - любое

3) Пусть $f(x)=ax^2+bx+c$. $f(0)+f(1)=a\cdot 0^2+b\cdot 0+c+a\cdot 1^2+b\cdot 1+c=a+b+2c=0$

$f(2)+f(3)=a\cdot 2^2+2b+c+3^2a+3b+c=13a+5b+2c=0$. $\begin{cases} -a-b-2c=0 \\ 13a+5b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 13a-a+5b-b+2c-2c=0 \\ a+b+2c=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 12a=-4b \\ c=-\frac{(a+b)}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-3a \\ c=-\frac{(a-3a)}{2}=a \end{cases}$. Тогда $f(x)=ax^2-3ax+a-2022$

По теореме Виета: $x_1+x_2=\frac{-(-3a)}{a}=3$

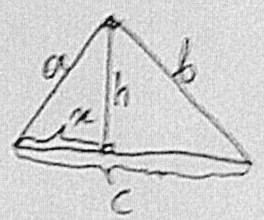
Ответ: 3

Шифр 004508

4) $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} > \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}}$ (т.к. $\frac{1}{2017} > \frac{1}{2019}$)

Пусть $t^2 = \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}}$ (заметим, что $t \neq 1$). $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}} = t^2 + \frac{1}{t^2} \geq 2$ (т.к. $(t-\frac{1}{t})^2 = t^2+\frac{1}{t^2} - 2t\cdot\frac{1}{t} \geq 0 \Rightarrow t^2+\frac{1}{t^2} \geq 2$). При этом $t^2+\frac{1}{t^2}=2$ только при $t=1$.

Получаем: $\sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2017}} > \sqrt[2020]{\frac{2019}{2020}} + \sqrt[2020]{\frac{2020}{2019}} > 2$, что требовалось док-ть.

5) 

Обозначим за x проекцию катета "a" на гипотенузу. Тогда по теореме о высоте из прямого угла треугольника: $a=\sqrt{x\cdot c}$, $h=\sqrt{x\cdot(c-x)}$, $b=\sqrt{c\cdot(c-x)}$.

Пусть условие выполняется: $c+\sqrt{x(c-x)} < \sqrt{xc}+\sqrt{c(c-x)}$.

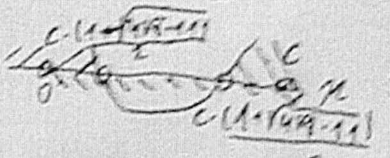
По неравенству среднего арифметического и среднего квадратичного:

$$\sqrt{xc}+\sqrt{c^2-cx} \leq 2\cdot\sqrt{\frac{(\sqrt{xc})^2+(\sqrt{c^2-cx})^2}{2}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{xc+c^2-cx} = \sqrt{2}c \Rightarrow c+\sqrt{cx-x^2} < \sqrt{2}c \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{cx-x^2})^2 < (c(\sqrt{2}-1))^2 \Rightarrow cx-x^2-c^2(3-2\sqrt{2}) < 0 \Rightarrow x^2-cx+c^2(3-\sqrt{2}) > 0$$

$D=(c)^2-12c^2+4\sqrt{2}c^2=(4\sqrt{2}-11)c^2$

$x_{1,2}=\frac{c \pm c\cdot\sqrt{4\sqrt{2}-11}}{2}$ $\sqrt{4\sqrt{2}-11}<1$ (т.к. $4\sqrt{2} < 11+1^2$) $\Rightarrow x_1>0$ $x_2>0$



, т.е. $x \in \left(0; \frac{c\cdot(1-\sqrt{4\sqrt{2}-11})}{2}\right) \cup \left(\frac{c}{2}\cdot(1+\sqrt{4\sqrt{2}-11}; 1\right)$

$\frac{1-\sqrt{4\sqrt{2}-11}}{2} \approx 0{,}22$.

Для проверки возьмём $x=0{,}1c$: $a=\sqrt{0{,}1c\cdot c}=c\sqrt{0{,}1}$, $b=\sqrt{c^2-0{,}1c^2}=c\sqrt{0{,}9}$, $h=\sqrt{0{,}1c\cdot 0{,}9c}=c\sqrt{0{,}09}=0{,}3c$. При этом $0{,}3c+c<c\cdot(\sqrt{0{,}1}+\sqrt{0{,}9}) \Rightarrow$ $1{,}3c<1{,}27c$, что неверно. Возникает противоречие, значит условие невозможно.

Ответ: нет