Место для скобы

003378

Шифр

ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ
заключительного этапа

1.	Предмет	МАТЕМАТИКА
2.	Вариант	1
3.	Класс	11
4.	Фамилия	ШМЕЛЬКОВА
	Имя	ДАРЬЯ
	Отчество	ОЛЕГОВНА
5.	Дата рождения	04 (Число) 03 (Месяц) 2003 (Год)
6.	Страна	РОССИЯ
7.	Регион *(пр: Томская обл., Алтайский край)*	КЕМЕРОВСКАЯ ОБЛ.
8.	Вид муниципального образования *(пр: село, город, пгт, деревня)*	ГОРОД
9.	Населенный пункт *(пр: Томск, Кемерово, Псков)*	ПРОКОПЬЕВСК
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБОУ „Гимназия № 72"

Даю согласие на обработку моих персональных данных и информирование меня посредством sms и e–mail о моих результатах и всех дальнейших мероприятиях, связанных с олимпиадой

Личная подпись Шмел

Место для скобы

Шифр 003378

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
21б	3.04.21	Гендрике И.Ю.	[illegible]

1	2	3	4	5
7	7	7	0	0

Задача № 1.

Пусть $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}=K$, $x-\frac{1}{x}=M$ и $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}=L$. Заметим, что

$K=\frac{x^2+2021-x}{x(x^2+2021)}=\frac{x^2-x+2021}{x(x^2+2021)}$, а $L=\frac{x-x^2-2021}{x(x^2+2021)}=\frac{-x^2+x-2021}{x(x^2+2021)}=-\frac{x^2-x+2021}{x(x^2+2021)}=-K$.

Если $K\in\mathbb{Z}$, то и $L=-K\in\mathbb{Z}$.

Число $M=x-\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$ только если $x\in\mathbb{Z}$ и $\frac{1}{x}\in\mathbb{Z}$. Это возможно только если $x=1$ или $x=-1$.

1) $x=1$. Подставим $x=1$ в число K.

$K=\frac{1^2-1+2021}{1(1^2+2021)}=\frac{2021}{2022}\Rightarrow K\notin\mathbb{Z}$, тогда и $L=-K\notin\mathbb{Z}$

7б

2) $x=-1$. Подставим $x=-1$ в число K.

$K=\frac{(-1)^2-(-1)+2021}{(-1)((-1)^2+2021)}=\frac{2023}{-2022}=-1\frac{1}{2022}\Rightarrow K\notin\mathbb{Z}$, тогда и $L=-K\notin\mathbb{Z}$

3) При $x\neq1$ и $x\neq-1$. Число $M\notin\mathbb{Z}$

Таким образом, при всех значениях x хотя бы одно из чисел K, L и M не принадлежит множеству целых чисел.

Ответ: не существует.

7б

Задача № 2.

$\sin x+\sin^3x+2020\sin^5x=\cos2x+\cos^32x+2020\cos^52x$

В уравнении все тригонометрические функции в нечётной степени, поэтому, чтобы равенство выполнялось, они должны быть одного знака. Получаем равносильное уравнение: $\sin x=\cos 2x$.

см. стр. 2

Место для скобы

Шифр 003378

$\sin x = 1 - 2\sin^2 x$

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin x = -1; \\ \sin x = \frac{1}{2}; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z} \end{array}\right.$

Ответ: $\frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$

Задача № 3.

$f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3,\ n > 1,\ n \in \mathbb{Z}$.

Если $f(x)$ можно разложить на произведение многочленов положительной степени с целыми коэффициентами, то мы сможем их найти из таблицы:

$n = 2$

	1	5	3
1	1	6	9
1	1	4	-1
3	1	8	27
3	1	2	-3
d	l_2	l_1	l_0

коэффициенты перед x^k

делители (d) свободного члена

формула для вычисления: $N_{k-1} = d\, l_k + l_{k-1}$

$n = 3$

	1	5	0	3
1	1	6	6	9
-1	1	4	-4	7
3	1	8	24	75
-3	1	2	-6	21
d	l_3	l_2	l_1	l_0

Расчитаем N_0 для всех возможных d:

$N_0 = \dots d(d(d l_n + l_{n-1}) + l_{n-2}) + \dots + l_0$ $\quad l_n = 1;\ l_{n-1} = 5;\ l_0 = 3$

$d = 1:\ N_0 = \dots 1\cdot(1\cdot(1\cdot 1 + 5) + 0) + \dots + 3 = 6 + 3 = 9$ $\quad N_0 \neq 0$

$d = -1:\ N_0 = \dots -1(-1\cdot(-1\cdot 1 + 5) + 0) + \dots + 3 = (-1)^{n-1}\cdot 4 + 3$ $\quad N_0 \neq 0$

$d = 3:\ N_0 = \dots 3\cdot(3\cdot(3\cdot 1 + 5) + 0) + \dots + 3 = 3^{n-1}\cdot 8 + 3$ $\quad N_0 \neq 0$

$d = -3:\ N_0 = \dots -3\cdot(-3\cdot(-3\cdot 1 + 5) + 0) + \dots + 3 = (-3)^{n-1}\cdot 2 + 3$ $\quad N_0 \neq 0$

$f(x) = l_n(x^{n-1} - N_{n-1})(x^{n-2} - N_{n-2}) \times \dots \times (x - N_1) + N_0$
$f(x)$ можно представить в виде произведения многочленов только при $N_0 = 0$.

$(-3)^{n-1}\cdot 2 + 3 = 0;\ (-3)^{n-1} = -\frac{3}{2};\ (-3)^n = -\frac{9}{2},\ n \notin \mathbb{Z}$. Это не соответствует условию,

значит $(-3)^{n-1}\cdot 2 + 3 \neq 0$

При любых возможных значениях d и n N_0 никогда не будет равно нулю. Это значит, что $f(x)$ нельзя разложить на произведение многочленов положительной степени с целыми коэффициентами.

Ответ: невозможно.

7б