ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004459

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ш Е Р Е М Е Т
	Имя	Е Г О Р
	Отчество	А Н Д Р Е Е В И Ч
5.	Дата рождения	15 (число) 10 (месяц) 2003 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Ростовская обл
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Ростов-на-Дону
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	Маоу Лицей Классический 1

№5

Рассмотрим числа $\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2+2021}$, $x-\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2+2021}-\frac{1}{x}$ 004459

Логично, что если одно из этих чисел не целое, то это не удов. условию. Тогда пусть будем рассматривать II число. Представим его как $x-\frac{1}{x}=k$, где $k\in Z$, тогда

$x^2-1=xk$; $x^2-xk-1=0 \Rightarrow D=\sqrt{k^2+4}$; $\Rightarrow x_{1,2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$ - это $\in Z \Rightarrow$

пусть $\sqrt{k^2+4}=n$, где $n\in Z$, тогда

$k^2+4=n^2 \Rightarrow n^2-k^2=4$ $(n-k)(n+k)=4$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} n-k=1 \\ n+k=4 \end{cases} \oplus \Rightarrow 2n=5 \quad n=\frac{5}{2} - \text{не удов.} \\ \begin{cases} n-k=4 \\ n+k=1 \end{cases} \oplus \Rightarrow 2n=5 \quad n=\frac{5}{2} - \text{не удов} \\ \begin{cases} n-k=2 \\ n+k=2 \end{cases} \oplus \quad n=2 - \text{удов.} \Rightarrow k=0 \Rightarrow \end{array}\right.$$

1	2	3	4	5
7	7	4	5	0

Итого: 23 б

только при $k=0$ $\sqrt{k^2+4}\in Z \Rightarrow$

$x_{1,2}=\frac{\pm\sqrt{4}}{2}=\pm1 \Rightarrow$ при $x=\pm1$; II число является целым.

Т.к мы рассматривали, где $A\in Z$. Осталось, при любых вещественных значениях $x-\frac{1}{x}$ - не будет $\in Z$, кроме $x=\pm1$. ~~Тод~~ Тогда пусть предположим, что при дробных значениях II число будет целым, тогда $x=\frac{p}{q}$, где $(p,q)=1$, тогда

$\frac{p}{q}-\frac{q}{p}=k \Rightarrow \frac{p^2-q^2}{pq}=k \Rightarrow p^2-q^2=kpq$.

7 б

Заметим, что правая часть $\vdots p$, тогда и $p^2-q^2 \vdots p$, но это достигается, когда $q^2 \vdots p$, но это невозможно т.к $(p,q)=1 \Rightarrow$ суждение неверно

Лист №1

№1 (продолжение) 004459

Допустим, что при x - принадлежащим иррациональным числам это возможно, что $x-\frac{1}{x}\in Z$, тогда =>

~~корни уравнения~~ ~~$x^2-xk-1\in Z$. => $\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}$, тогда~~

$\frac{x^2-1}{x}\in Z$ при x - иррациональная, это также

x^2-1 будет рацион или иррацион. по любом иначе

невозможно т.к. $x^2-1\in Z$ при $x\in$ иррациональным, а x - будет иррациональное => если делить целое на иррац иррациональное, то будет иррациональное => такое суждение неверно.

число II будет иррац. т.к. деление иррац на иррац. будет целым только если они равны но это невоз

=> Мы доказали, что при всех возможных значениях x, число $x-\frac{1}{x}\in Z$ только $x=\pm1$, остальные не подходят => подставим $x=\pm1$ в другие числа, если другие числа будут целыми, то это подходит по условию, если нет, то наоборот не подходит.

при $x=1$ I число $1-\frac{1}{2022}=\frac{2021}{2022}$ - не целое => не удов

III число $\frac{1}{2022}-1=-\frac{2021}{2022}$ - не целое => не удов

при $x=-1$

I число $\cancel{1}-\frac{1}{2022}+1 = -\frac{2023}{2022}$ $\cancel{-\frac{2021}{2022}}$ - не целое => не удов

III число $\frac{1}{2022}+1=\frac{2023}{2022}$ - не целое => не удов.

Т.к. $x-\frac{1}{x}\in Z$ только при $x=\pm1$ и при этих значениях I и III - не явл. также целыми => это не удов. условию => Ответ: таких чисел не существует

Лист №2

№2 004459

$\sin(2x)+\sin^5(2x)+2020\sin^9(2x)=\cos(4x)+\cos^5(4x)+2020\cos^9(4x)$

Пусть $\sin(2x)=a$; $\cos(4x)=b$, тогда

$$a+a^5+2020a^9=b+b^5+2020b^9$$

Пусть $F(x)=x+x^5+2020x^9$; тогда $f(x)'=1+x^4+9\cdot2020\cdot x^8>0$

$\Rightarrow \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow F(x)$ - монотонно возрастает $\Rightarrow$

$F(a)>F(b)$ при $a>b \Rightarrow F(a)=F(b)\Rightarrow a=b \Rightarrow$

$\sin(2x)=\cos(4x)$

$\sin(2x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)$ - по формуле приведения

$\sin 2x-\sin\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)=0$ тк $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\Rightarrow$

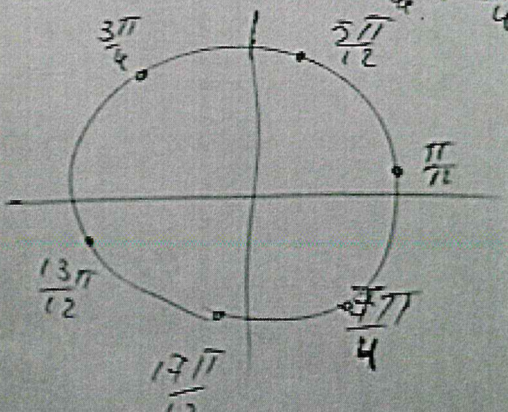
$2\sin\left(\frac{2x+4x-\frac{\pi}{2}}{2}\right)\cos\left(\frac{2x-4x+\frac{\pi}{2}}{2}\right)=0\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=0\\ \cos\left(-x+\frac{\pi}{4}\right)=0\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}3x-\frac{\pi}{4}=\pi k \Rightarrow x=\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{12}\\ -x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+\pi k \Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+\pi n\end{array}\right.$$

7б

Заметим, что $-\frac{\pi}{4}+\pi n$ входит в $\frac{\pi k}{3}+\frac{\pi}{12}$ (точки совпадают) тк при $k=2$ и $n=1$ точки совпадают на $\frac{3\pi}{4}$, также при $k=5$ $n=2$ точки совпадают на $\frac{7\pi}{4}$

$\Rightarrow x=\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{12}$



Ответ $x=\frac{2\pi k}{3}+\frac{\pi}{12}$

Лист №3

№3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, если $t^n+5t^{n-1}+3$, можно разложить,

то можно представить $p(t) = f(t) \cdot Q(t)$

$$\begin{cases} f(t) = a_k t^k + a_{k-1} t^{k-1} \dots + a_1 t + a_0 \\ Q(t) = b_m t^m + b_{m-1} t^{m-1} \dots + b_1 t + b_0 \end{cases} \Rightarrow$$

$m + k = n \Rightarrow a_k = b_m = 1$ т.к. t^n имеет коэффициент 1

$\Rightarrow \begin{cases} a_0 = \pm 3 \\ b_0 = \pm 1 \end{cases} \begin{cases} a_0 = \pm 1 \\ b_0 = \pm 3 \end{cases}$ т.к. свободный член у $p(t) = 3$

Рассмотрим коэффициенты $f(t) \cdot Q(t)$

$x^n \vdots 1$

$x^{n-1} \vdots a_k b_{m-1} + a_{k-1} b_m = 5$

$x^{n-2} \vdots a_{k-2} b_m + a_{k-1} b_{m-1} + a_k b_{m-2}$

x^{n-3} : $a_{k-3} b_m \dots$ и т.д.

$a_0 b_0 = 3$

Заметим, что коэффициенты выглядят вот так в зависимости от степени числа x

$$x^{n-r} = \sum_{i=0}^{r} a_{k-r+i} b_{m-i}.$$

Рассмотрим $p(t) \underset{3}{\equiv} \Rightarrow$ 4б

$* \sum_{i=0}^{r} a_{k-r+i} b_{m-i} \underset{3}{\equiv} 0$ $a_i \{0,1,2\}$; $b_i \{0,1,2\}$ Пусть l - это такое число,

что $\min l : a_l \underset{3}{\equiv} 0$ тогда $a_l b_0 + a_{l-1} b_1 + a_{l-2} b_2 \dots a_1 b_{l-1} + a_0 b_l \equiv$ коэффициент

$\underset{3}{\equiv} a_l b_0$, где $a_l b_0 \underset{3}{\not\equiv} 0$ из чего следует, что $l \geq n-1$

$n-1 \leq l \leq m \Rightarrow m = n-1$, тогда $k = 1$ из чего следует, что $f(t)$ или $Q(t) = \alpha_1 x + \alpha_0 \Rightarrow$? Нет ответа на вопрос.

Лист №4

№3 (продолжение)

$$t^n+5t^{n-1}+3 = \cancel{t\ldots}\,(t+a_0)(t^{n-1}+\ldots\, b_0)$$

тогда разберем все возможные a_0 их всего 4

$a_0 = \pm3; \pm1$, тогда подставим.

при $a=1 \Rightarrow t=-1$ $\quad (-1)^n+5(-1)^{n-1}+3\neq0$

т.к. если n - четное, то $1-5+3\neq0$
если n - нечетное, то $-1-5+3\neq0$

при $a=-1 \Rightarrow t=1$

$(1)^n+5(1)^{n-1}+3$

1 - в любой степени $1 \Rightarrow 1+5+3\neq0$

при $a=3 \Rightarrow t=-3$ $\quad (-3)^n+5(-3)^{n-1}+3$

$(-3)^{n-1}(-3+5)+3 = (-3)^{n-1}\cdot2+3$, заметно, что при целых, положит. n $(-3)^{n-1}\cdot2+3\neq0$

при $a=-3$; $t=3$ $\quad 3^n+5\cdot(3)^{n-1}+3\neq0$

т.к. $3^n>0$; $3^{(n-1)}>0$ при любых n

Т.к. мы рассмотрели все случаи и ни одно из них не подошло $\Rightarrow t^n+5t^{n-1}+3$ - невозможно представить в виде умножение многочленов положительной степени. ЧТД.

Лист №5

image-11-04-21-01-57-2.jpeg

№4

$$\frac{x^3}{m+2020^{\frac{4}{3}}} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{x^3+2020^{\frac{4}{3}}x} - \frac{2020^{\frac{4}{3}}x}{m+x^3}$$

$$\frac{x^3}{m+2020^{\frac{4}{3}}} + \frac{m}{x^3+2020^{\frac{4}{3}}x} + \frac{2020^{\frac{4}{3}}x}{m+x^3} \leq \frac{3}{2}$$

Пусть, для удобства $2020^{\frac{4}{3}}x = 6$

Недост. обосн.

$\frac{x^3}{m+6} + \frac{m}{x^3+6} + \frac{6}{m+x^3} \leq \frac{3}{2}$ Заметим, что

каждый раз x^3, m, 6 чередуются в числителях

5б

и знаменателях. Тогда заметно, что по теореме Коши: $\frac{a}{6+c} + \frac{6}{a+c} + \frac{c}{a+6} \geq \frac{3}{2} \Rightarrow$

Аналогично с нашим неравенством. заметим, что у нас по условию знак $\leq \frac{3}{2}$; а по т. Коши $\geq \frac{3}{2} \Rightarrow$

$\frac{x^3}{m+6} + \frac{m}{x^3+6} + \frac{6}{m+x^3} = \frac{3}{2}$ Решим уравнение

$\frac{x^3}{m+6} = \frac{m}{x^3+6} = \frac{6}{m+x^3} = \frac{1}{2}$, только при этом значении

выполнится равенство тогда $x^3 = m = 6$ возведем для удобства в 3ю степень $x^9 = m^3 = 6^3$

$x^9 = m^3 = 2020^4 x^3 \Rightarrow x^9 = 2020^4 x^3 \Rightarrow x^3(x^6 - 2020^4) = 0$

$x \neq 0 \Rightarrow x^6 - 2020^4 \Rightarrow x = 2020^{\frac{2}{3}} \Rightarrow$

$m^3 = 2020^6 \Rightarrow m = 2020^2 \Rightarrow$ Ответ при $m = 2020^2$

существуют положительные решения неравенства

Лист №6