ОТКРЫТАЯ РЕГИОНАЛЬНАЯ МЕЖВУЗОВСКАЯ ОЛИМПИАДА ВУЗОВ ТОМСКОЙ ОБЛАСТИ «ОРМО»

004460

Шифр

ТИТУЛЬНЫЙ ЛИСТ

1.	Предмет	Орг. документы
2.	Вариант	Математика 11 класс Вариант 3 закл
3.	Класс	11
4.	Фамилия	Ш Е Л К О В Н И К О В А
	Имя	Е К А Т Е Р И Н А
	Отчество	С Е Р Г Е Е В Н А
5.	Дата рождения	2 8 (число) 0 2 (месяц) 2 0 0 3 (год)
6.	Страна	Россия
7.	Регион (пр: Томская обл., Алтайский край)	Кемеровская область - Кузбасс
8.	Вид муниципального образования (пр: село, город, пгт, деревня)	Город
9.	Населенный пункт (пр: Томск, Кемерово, Псков)	Новокузнецк
10.	Полное наименование образовательного учреждения, в котором Вы обучаетесь	МБНОУ Лицей №84 им. В.А.Власова

Место для скобы

Шифр 004460

Открытая региональная межвузовская олимпиада вузов Томской области (ОРМО)

Общий балл	Дата	Ф.И.О. членов жюри	Подписи членов жюри
30 б	14.04.21	Гендрико И.Ю.	[signature]

№1 (начало)

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{x^2-x+2021}{x(x^2+2021)}$$

$$\frac{1}{x^2+2021} - \frac{1}{x} = -\frac{x^2+x-2021}{x(x^2+2021)} = -\frac{(x^2-x+2021)}{x(x^2+2021)} \Rightarrow$$

Эти два числа противоположные $\Rightarrow$ Если одно из них будет целым, то и другое также будет целым.

Тогда:

$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021}$ - целое и $x - \frac{1}{x}$ - целое.

Пусть $x - \frac{1}{x} = a$, где $a \in Z$ $\Rightarrow$ $\frac{1}{x} = x - a$,

где $\frac{1}{x}$ - гипербола, $x - a$ - прямая

Поскольку $\frac{1}{x}$ симметрично относительно начала координат, то можно рассматривать только $x > 0$

Пусть $x = t^{\alpha}$, $\alpha \in N$ $\Rightarrow$

1	2	3	4	5
7	6	3	7	7

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2+2021} = \frac{1}{t^{\alpha}} - \frac{1}{(t^{\alpha})^2+2021}$$

Пусть $\frac{1}{t^{\alpha}} - \frac{1}{(t^{\alpha})^2+2021} = b$, $b \in Z$ $\Rightarrow$

$$\frac{1}{(t^{\alpha})^2+2021} = \frac{1}{t^{\alpha}} - b = \frac{1-b\cdot t^{\alpha}}{t^{\alpha}} \Rightarrow$$

7 б

$$t^{\alpha} = (1-b\cdot t^{\alpha})(t^{2\alpha}+2021)$$

см. на след. стр.

Место для скобы

№1 (продолжение)

Шифр 004460

Пусть $t^{\alpha} = c$, где $c > 0 \Rightarrow$

$$\alpha - (1 - b^{c})(c + 2021) = c(1 - b^{c})(c^2 + 2021) =$$

$$= c - (c^2 + bc^3 + 2021 + 2021bc) =$$

$$= c - c^2 + bc^3 - 2021 - 2021bc$$

Если это кубическое уравнение будет иметь корни, но $c_1 + c_2 + c_3 = -1$, а поскольку $t^{\alpha} > 0 \Rightarrow$ корней, которые будут удовлетворять условию нет.

Ответ: нет

Шифр 004460

№ 2

$\sin 2x + \sin^5(2x) + 2020 \cdot \sin^9(2x) = \cos 4x +$
$+ \cos^5(4x) + 2020 \cdot \cos^9(4x)$ $=?$

Рассмотрим функции $f(\sin 2x)$ и $f(\cos 4x)$.

$f(t) = t + t^5 + 2020 t^9$

$$\left.\begin{aligned} f'(t) &= 1 + 5t^4 + 9 \cdot 2020 \cdot t^8 \\ f'(g) &= 1 + 5g^4 + 9 \cdot 2020 g^8 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} f'(t) > 0 \\ f'(g) > 0 \end{aligned} \Rightarrow ?$$

$f(g) = g + g^5 + 2020 g^9$

$\Rightarrow f(t) = f(g) \Rightarrow f(\sin 2x) = f(\cos 4x) \Rightarrow$

$\sin 2x = \cos 4x$

6 б

$\sin 2x = 1 - 2\sin^2 2x$

$2\sin^2 x + \sin 2x - 1 = 0$

$D = 1 + 8 = 9 = 3^2$

$$\left[\begin{aligned} \sin 2x &= -\frac{1+3}{4} = \frac{1}{2} \\ \sin 2x &= -\frac{1-3}{4} = -1 \end{aligned}\right. \Rightarrow$$

1) $\sin 2x = \frac{1}{2}$

$$\left[\begin{aligned} 2x &= \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \\ 2x &= \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z \end{aligned}\right.$$

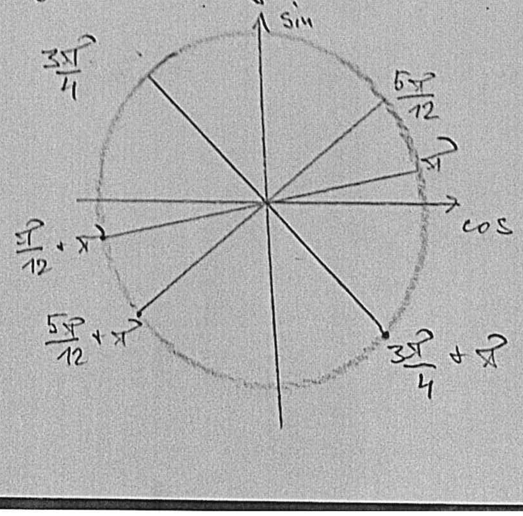
$$\left[\begin{aligned} x &= \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z \\ x &= \frac{5\pi}{12} + \pi n, n \in Z \end{aligned}\right.$$

2) $\sin 2x = -1$

$2x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$x = \frac{3\pi}{4} + \pi k, k \in Z$

Найдем объединение:



Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z$

Место для скобы

Шифр

№4 (начало)

$$\frac{x^3}{m+\sqrt[3]{2020^4}\cdot x} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{x\cdot\left(x^2+\sqrt[3]{2020^4}\right)} - \frac{\sqrt[3]{2020^4}\cdot x}{m+x^3}$$

Пусть $x^3 = a$, $\sqrt[3]{2020^4}\cdot x = b$, $x>0$ по условию $\Rightarrow$ $a>0, b>0$

$$\frac{a}{m+b} \leq \frac{3}{2} - \frac{m}{a+b} - \frac{b}{m+a}$$

$$\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \leq \frac{3}{2}$$

$\frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a}$ – минимальное значение $\frac{3}{2}$ при условии что $a=b=m$ $\left(\frac{a}{a+a}+\frac{a}{a+a}+\frac{a}{a+a}=\frac{3}{2}\right)$

$$\begin{cases} \frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \geq \frac{3}{2} \\ \frac{a}{m+b} + \frac{m}{a+b} + \frac{b}{m+a} \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow$$ – возможно только при $=\frac{3}{2}$

$$\Rightarrow \frac{a}{m+b} + \frac{m}{b+a} + \frac{b}{m+a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a=b=m \Rightarrow$$

$$x^3 = \sqrt[3]{2020^4}\cdot x = m \Rightarrow x^2 = \sqrt[3]{2020^4} \Rightarrow x = 2020^{\frac{2}{3}}$$

$$m = x^3 = 2020^{\frac{2}{3}\cdot 3} = 2020^2 = 4.080.400$$

Ответ: $m = 4080400$

7б

см. на след. стр. дополнение

Место для скобы

Шифр

№4 (дополнение)

$$0 = d\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\right) = \left(\frac{1}{b+c}-\frac{b}{(c+a)^2}-\frac{c}{(a+b)^2}\right)\cdot da + \left(\frac{1}{c+a}-\frac{c}{(a+b)^2}-\frac{a}{(b+c)^2}\right)db + \left(\frac{1}{a+b}-\frac{a}{(b+c)^2}-\frac{b}{(c+a)^2}\right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{a+b}=\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}; \quad \frac{1}{b+c}=\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2};$$

$$\frac{1}{a+c}=\frac{c}{(a+b)^2}+\frac{a}{(b+c)^2} \Rightarrow$$

Суммируем эти 3 выражения:

$$\frac{1}{b+c}+\frac{1}{b+a}-\frac{1}{c+a}=\frac{2b}{(a+c)^2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2(a+b+c)}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{a+b}+\frac{1}{c+a}\right)=\frac{1}{(c+a)^2}$$

Симметрично: $\frac{1}{(a+b)^2}=\frac{1}{(b+c)^2}=\frac{1}{(c+a)^2} \Rightarrow$

$a=b=c$ (min значение выражения, при котором оно равно $\frac{3}{2}$) $\Rightarrow$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{3}{2} \text{ — min}$$

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geq\frac{3}{2} \text{ — общее}$$

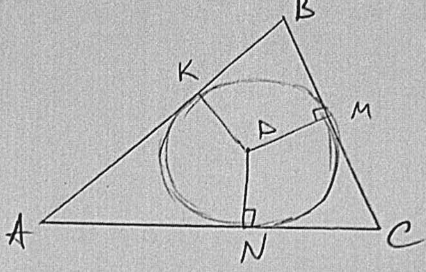
№5

Дано:

$\triangle ABC$, точка P – внутри $\triangle$

M, N, K – ортогональные проекции точки P на BC, AC, AB

P – ? : для кот. $\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ – min



Решение:

Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$

Воспользуемся неравенством о средних:

$$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK} = \frac{a}{PM}+\frac{b}{PN}+\frac{c}{PK} \geq 3\sqrt[3]{\frac{abc}{PM\cdot PN\cdot PK}} \Rightarrow$$

$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет минимальным при равенстве:

$\frac{a}{PM}+\frac{b}{PN}+\frac{c}{PK} = 3\sqrt[3]{\frac{abc}{PM\cdot PN\cdot PK}}$: данное равенство будет выполняться только в том случае, когда $a = b = c$ (т.е. треугольник ABC – равносторонний)

При этом $PM = PN = PK = r$, где r – радиус вписанной окружности $\Rightarrow$

$\frac{BC}{PM}+\frac{AC}{PN}+\frac{AB}{PK}$ будет минимальным в том случае, когда P будет центром вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

Ответ: P должна быть центром вписанной в $\triangle ABC$ окружности.

№ 3

$p(t) = t^n + 5t^{n-1} + 3$, где $n>1$, n - целое число

Разложим на множители:

$p(t) = t^{n-1}\left(t+5+\frac{3}{t^{n-1}}\right) = t^{n-1}\left(5+t+\frac{3t}{t^n}\right) =$

$= \frac{t^n}{t}\left(5+t+\frac{3t}{t^n}\right)$

Также: $t^n + 5t^{n-1} + 3 = t^{n-1}(t+5)+3$

Пусть $n=2$:

$t^2+5t+3 \Rightarrow$ $\qquad t^2+5t+3 = \left(t-\left(\frac{-5+\sqrt{13}}{2}\right)\right)\left(t-\left(\frac{-5-\sqrt{13}}{2}\right)\right)$

$D = 25 - 4\cdot 3 = 13$ $\qquad \Rightarrow$ корни не являются целыми числами

$$\left[\begin{aligned} t_1 &= \frac{-5+\sqrt{13}}{2} \\ t_2 &= \frac{-5-\sqrt{13}}{2} \end{aligned}\right.$$

3б

В других случаях разложить на множители по условию также не получится, а будет: $\left(t^{n-1}(t+5)+3\right)$, поскольку тройка нигде не будет задействована.

Ответ: нет

Недостаточное обоснование для общего случая